Eksponentialfunktioner

Anvendelse: rentesregning

Beløb B forrentes med rente r pr. tidsenhed

$B(1+r)$, $B(1+r)^2$, $B(1+r)^3$, ...

Dvs vækst beskrives vha funktion $f(t) = (1+r)^t$

$t = 1, 2, 3, \ldots$

Mere generelt

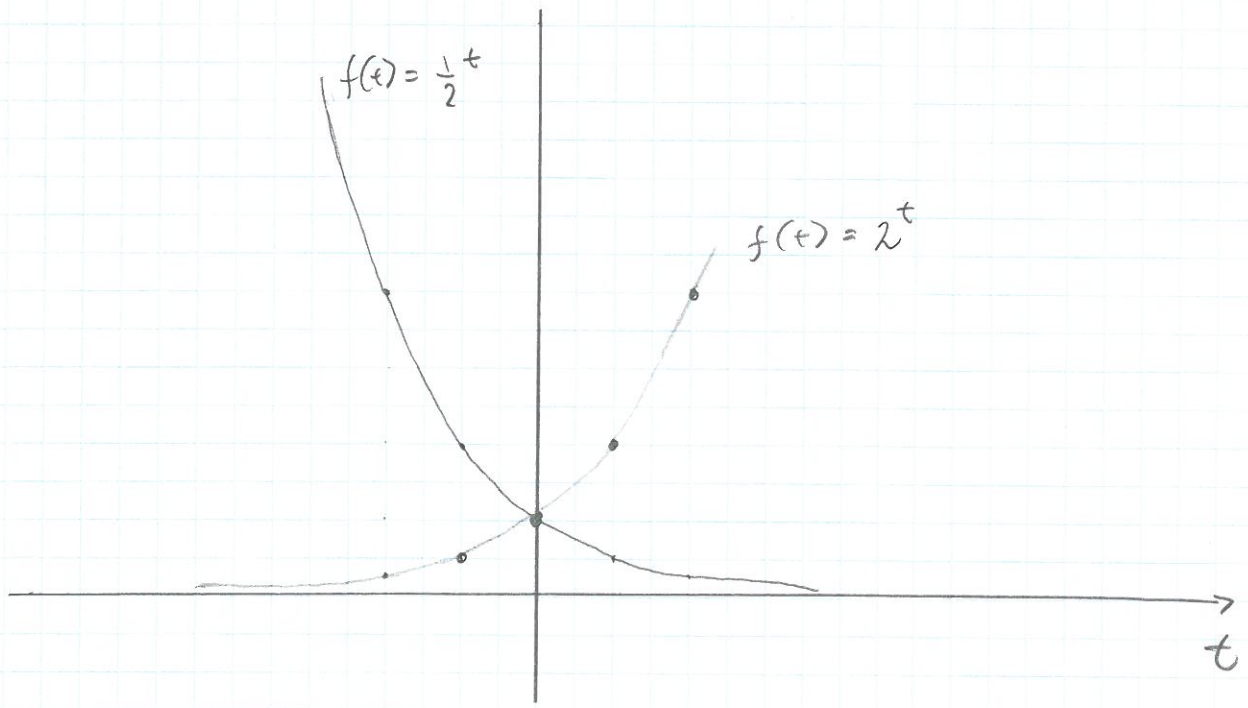
$$f(t) = b^t \qquad b > 0 \qquad t \in \,]-\infty, \infty[$$

(eksponentialfunktion med grundtal b)

Ex

$b = 2 \qquad f(0) = 2^0 = 1 \qquad f(1) = 2^1 = 2 \qquad f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2} \quad \ldots$

$b = \frac{1}{2} \qquad f(0) = \frac{1}{2}^0 = 1 \qquad f(1) = \frac{1}{2}^1 = \frac{1}{2} \qquad f(-1) = (\frac{1}{2})^{-1} = 2 \quad \ldots$



NB $\left(\frac{1}{b}\right)^t$'s graf spejling om y-aksen af b^t's graf.

Egenskaber for $f(t) = b^t$

- defineret for $t \in]-\infty, \infty[$
- værdimængde $]0, \infty[$ (altid positiv)
- strengt $\begin{cases} \text{voksende} & \text{hvis } b > 1 \\ \text{aftagende} & \text{hvis } b < 1 \end{cases}$
- $f(0) = 1$

Regneregler

$$f(x+y) = b^{x+y} = b^x b^y = f(x) \cdot f(y)$$
$$f(s)^t = (b^s)^t = b^{st} = f(st) = f(t)^s$$

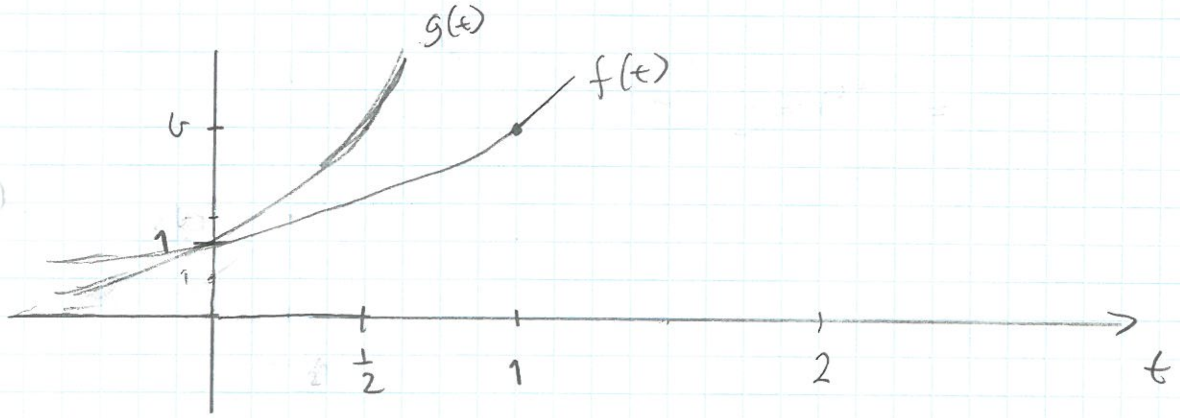
Motivation (÷ bevis)

$$2^3 \cdot 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7$$
$$(2^3)^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2)(2 \cdot 2 \cdot 2)(2 \cdot 2 \cdot 2)(2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^{12} = (2^4)^3$$

Variationer af eksponentialfunktioner

$g(t) = b^{2t} = (b^2)^t$. Dvs eksponentialfkt med grundtal b^2.

$f(t) = b^t$ vs $g(t) = b^{2t}$:



$g(t)$: "accelereret" udgave af $f(t)$ (tiden går dobbelt så hurtigt)

Multiplikation med koefficient

$f(t) = a b^t$

$f(0) = a$ – dvs a skæring

forstørrer / formindsker oprindelig fkt b^t hvis $a > 1$ / $a < 1$.

"hastighed"

Generel form $f(t) = a b^{ct}$

skæring

Quiz

$a < 0$? $c < 0$?

Alle funktioner b^{ct} er eksponentialfunktioner med grundtal b^c. For givet b_1 og b_2 kan vi altid vælge et c så $b_2^t = b_1^{ct}$.

Findes naturligt grundtal som vi kan definere alle eksp. funktioner ud fra ?

Naturlig eksponentialfunktion

$$e = \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 2.71828\ldots$$

God tilnærmelse hvis vi udregner med stort m:

$$\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} = 2.704814$$

$$\left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2.716924$$

$f(t) = e^t$ særlig pæn da $f'(t) = \frac{d}{dt} e^t = e^t$

Dvs funktionens vækst hastighed = funktionen selv

Relativ vækst rate $= \dfrac{f'(t)}{f(t)} = 1$.

Alternativ notation $\boxed{e^t = \exp(t)}$!

Eksponentialfunktionen og "kontinuert rentetilskrivning

Antag årlig rentesats 100 %. Start indestående 1 kr.

I praksis varierer indestående så behov for løbende rentetilskrivning.

Kvartalsvist: tilskriv $\frac{100\%}{4} = 25\%$ pr. kvartal.

$$1(1+0.25)(1+0.25)(1+0.25)(1+0.25) = \left(1+\frac{1}{4}\right)^4$$

Dagligt: $\left(1+\frac{100\%}{365}\right)^{365}$ (tæt på e)

Timebasis: $\left(1+\frac{100\%}{24\cdot 365}\right)^{24\cdot 365}$ (meget tæt på e)

Med uendeligt små tidsintervaller:

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{100\%}{m}\right)^m = e.$$

Dvs. effektiv rente pr. år $= (e-1)\cdot 100\% = 171\%$

Hvis nominel rente $r = 10\%$ fås med samme model

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{0.10}{m}\right)^m = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{10m}\right)^m =$$

$$\lim_{m\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{10m}\right)^{10m}\right)^{\frac{1}{10}} = e^{0.1} = 1.1052.$$

Dvs effektiv rente 10.52%.

Dvs. e^r = rentetilskrivning pr. tidsenhed når vi tilskriver m gange med rentesats $\frac{r}{m}$ og lader $m\to\infty$

(meget hyppig tilskrivning)

e^{rt} = tilskrivning over tidsrum t

(NB: duer for alle værdier af $t > 0$ - dvs "kontinuert" tilskrivning).

Omvendt: vil f.eks. gerne have effektiv årlig rente på 20 % med kontinuert tilskrivning. Hvad skal "r" være?

Dvs $e^r = 1.2$ skal løses mht r. $\Leftrightarrow r = 0.1823$

(Løses vha logaritmefunktioner - senere)

F.eks. daglig tilskrivning med $\frac{0.1823}{365} = 0.4995$ promille svarer med god tilnærmelse til 20 % pr. år.

$$\left(1 + \frac{0.1823}{365}\right)^{365} = 1.199945.$$

<u>Dvs</u> med startkapital A og nominel rente r angiver

$$K(t) = A e^{rt}$$

værdi af kapital til tid $t > 0$ ved kontinuert tilskrivning.

Tilbagediskontering

Antag nominel rente $r = 5\%$

Hvad er nutidsværdien af at få udbetalt 1000 kr om 10 år?

Svarer til at finde beløb A så

$$A e^{r10} = 1000 \Leftrightarrow A = \frac{1000}{e^{r10}} = e^{-r10} 1000$$

$$= e^{-0.5} 1000$$

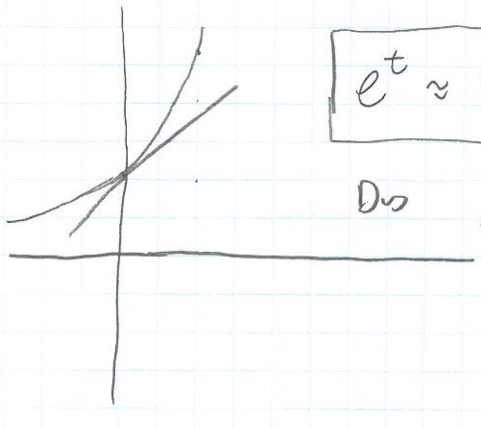
$$= 606.5 \text{ kr.}$$

Mere generelt nutidsværdi af B kroner t år frem i tiden er

$$A = e^{-rt} B.$$

Approximation af e^t

$e^0 = 1$ $\quad \frac{d}{dt} e^t = e^t$ dvs diff. kvotient $= 1$ for $t = 0$.



$\boxed{e^t \approx 1 + t}$ når t lille (men $e^t > 1 + t$)

Dvs for lille nominel r vil effektiv rente e^r være tæt på r men dog altid lidt større.

Logaritmefunktioner

Logaritmefkt $\log_b$ med grundtal b er omvendt (invers) fkt til b^t.

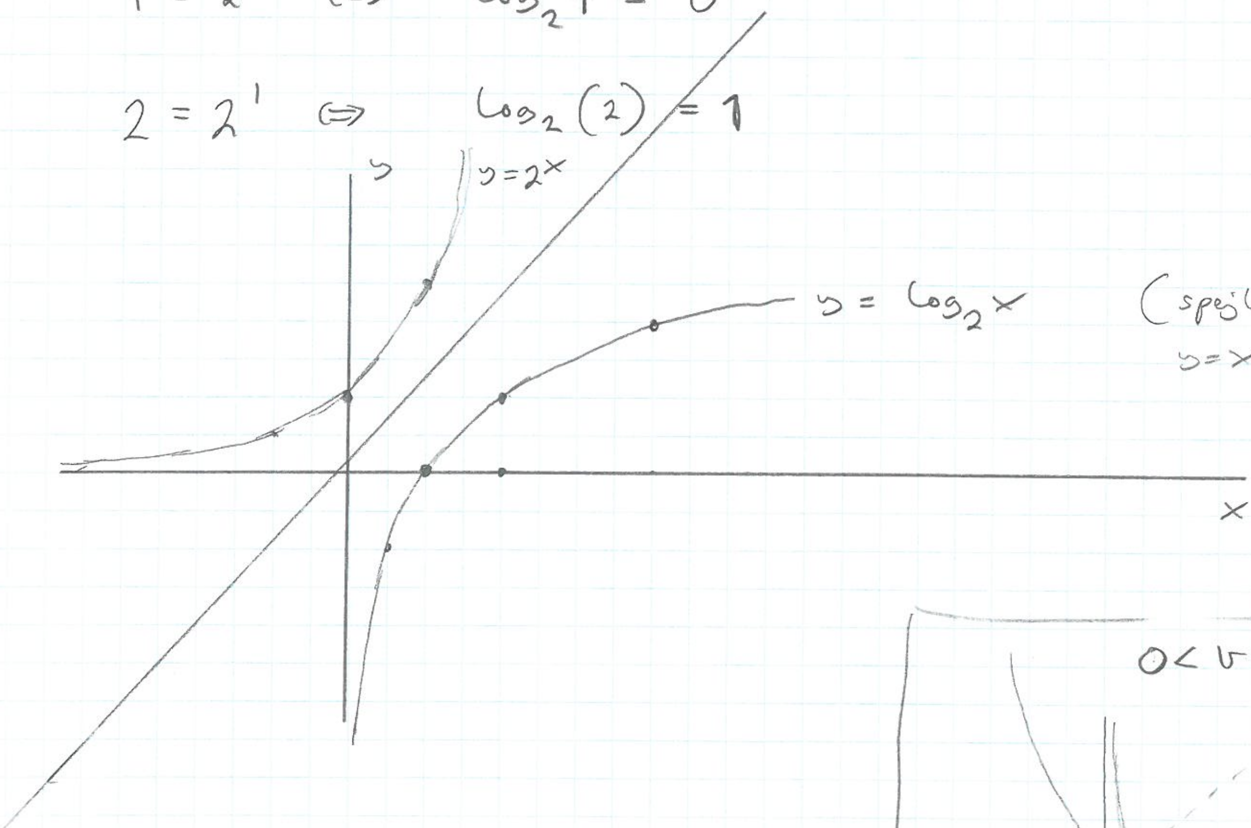
Dvs $y = \log_b x \iff x = b^y$

Ex $b = 2$

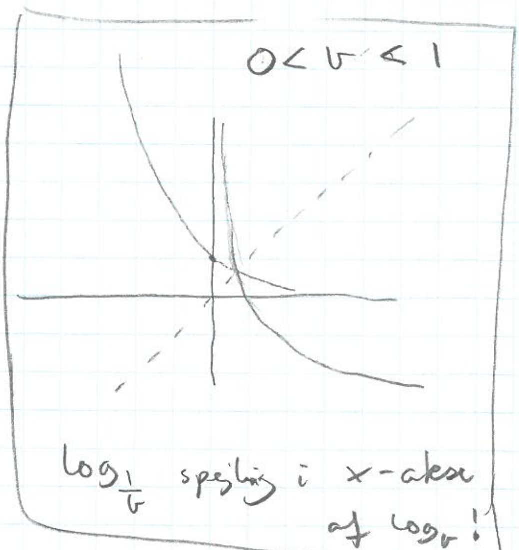
$\frac{1}{2} = 2^{-1} \iff \log_2 \frac{1}{2} = -1$ $\qquad 4 = 2^2 \iff \log_2 4 = 2$

$1 = 2^0 \iff \log_2 1 = 0$

$2 = 2^1 \iff \log_2(2) = 1$



(spejling i $y=x$ af 2^x)



Egenskaber

- Def på $]0, \infty[$
- Værdimængde $]-\infty, \infty[$
- strengt $\begin{cases} \text{voksende} & b > 1 \\ \text{aftagende} & b < 1 \end{cases}$
- $\log_b(1) = 0$

- $\log_b b^t = t$ og $b^{\log_b t} = t$

- $\log_b(u \cdot v) = \log_b(u) + \log_b(v)$

- $\log_b(u/v) = \log_b(u) - \log_b(v)$ (tag b^x på begge sider)

- $\log_b u^a = a \log_b u$

(følger af $\log_b b^t = t$ $b^{\log_b t} = t$)

Naturlig logaritme

$\ln x = \log_e x$ invers til e^x $(\exp(x))$

Ex rentesregning

$e^r = 1.2 \iff r = \ln 1.2 = 0.1823$

$\left(1 + \frac{r}{365}\right)^{365} = 1.2 \iff 365 \ln\left(1 + \frac{r}{365}\right) = \ln 1.2$

$\iff \ln\left(1 + \frac{r}{365}\right) = \frac{\ln 1.2}{365} \iff$

$1 + \frac{r}{365} = \exp\left(\frac{\ln 1.2}{365}\right) \iff r = 365 \cdot \left(\exp\left(\frac{\ln 1.2}{365}\right) - 1\right)$

$\iff r = 0.0004996.$

Skift af grundtal for eksponentialfkt

$$y = a^t = b^{\log_b a^t} = b^{t \cdot \log_b a}$$

– og for logaritmefunktionen:

$$y = \log_b t = \log_b a^{\log_a t} = \log_a t \cdot \log_b (a) = \frac{\log_a (t)}{\log_a (b)}$$

Skift til naturlig eksp / logaritme

$$y = a^t = e^{t \ln a} \qquad y = \log_b t = \frac{\ln(t)}{\ln(b)}$$

Dvs alle eksp / logaritmefunktioner kan beregnes

vha exp og ln.

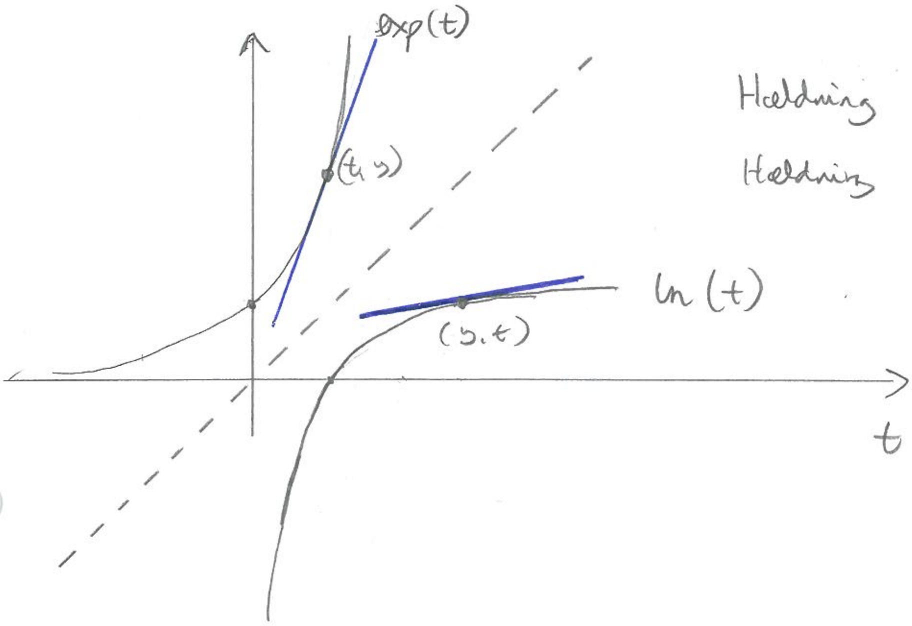
Afledte af exp og ln

$$\frac{d}{dt} e^t = e^t$$

Dvs.

- $f(t) = b^t = e^{t \ln b} \Rightarrow f'(t) = \ln b \; e^t$

- $f(t) = \ln t \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{t}$ da ln invers til exp.



Hældning i (t, y) : $e^t = y$

Hældning i $(y, t) = \frac{1}{e^t} = \frac{1}{y}$

- $f(t) = \log_b(t) = \frac{\ln t}{\ln b} \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{t \ln b}$

Relativ vækstrate

$$\frac{d}{dt} \ln f(t) = \frac{1}{f(t)} \cdot \frac{d}{dt} f(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$$

Ex relativ vækstrate for $f(x) = x^2 \cdot 2^x$

$$\frac{d}{dx} \ln\left(2^x \cdot x^2\right) = \frac{d}{dx} \ln 2^x + \frac{d}{dx} \ln x^2$$

$$= \frac{d}{dx} x \cdot \ln 2 + \frac{d}{dx} 2 \ln x = \ln 2 + \frac{2}{x}$$

Ex differentiere $f(x) = (x+2)^3 (2x+4)^5 (5x+7)^6$

Vi ved $f'(x) = f(x) \cdot \frac{d}{dx} \ln f(x)$.

$$\frac{d}{dx} \ln f(x) = \frac{d}{dx}\left[3 \ln(x+2) + 5 \ln(2x+4) + 6 \ln(5x+7)\right]$$

$$= \frac{3}{x+2} + \frac{10}{2x+4} + \frac{30}{5x+7}$$

Ex vinlager

(nutids) Værdi af vinlager til tid t er

$$f(t) = K e^{\sqrt{t}} e^{-rt}$$

Hvornår er værdi maksimal?

Find t så $f'(t) = 0 \iff \frac{d}{dt} \ln f(t) = 0$

$$\frac{d}{dt} \ln f(t) = \frac{d}{dt}\left[\ln K + \sqrt{t} - rt\right] = \frac{1}{2\sqrt{t}} - r$$

$$\frac{d}{dt} \ln f(t) = 0 \iff r = \frac{1}{2\sqrt{t}} \iff \sqrt{t} = \frac{1}{2r} \iff$$

$$t = \frac{1}{4r^2}.$$