Bestemt integrale

For en funktion f og integrationsgrænser a og b er det bestemte integrale af f fra a til b givet ved

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

hvor F er en stamfunktion til f.

Regler for bestemt integrale

Konsekvens af regler for ubestemt integrale:

- $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
- $\int_a^b f(x)+g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$
- $\int_a^b f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\mathrm{d}u$
- $\int_a^b f(x)G(x)\mathrm{d}x = [F(x)G(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g(x)\mathrm{d}x$

Tilsvarende for alle de andre regler for ubestemt integrale.

Yderligere regler for bestemt integrale

Følger af areal-betragtninger:

- $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$
- $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$ når $a < b < c$.

Endeligt (ombytning af integrationsgrænser):

- $\int_b^a f(x) = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Anvendelse af numerisk integration: Black-Scholes prisfastsættelse

S_t værdi af aktie til tid t (tilfældig variabel).

Call option: giver ret til at købe aktie for pris K til termin T.

Pay-off: $\max(S_T - K, 0)$

Pris i dag ($t = 0$) er tilbagediskonteret (nutidsværdi) af forventet værdi af pay-off til termin T:

$$\exp(-rT)\mathbb{E}\max(S_T - K, 0) =$$
$$\exp(-rT)\int_{-\infty}^{\infty}\max(x - K, 0)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}}\exp[-\frac{1}{2\sigma^2 T}(x - rT + \sigma^2 T/2)^2]\mathrm{d}x$$

r: rentesats (inflation) σ^2: volatilitet (hvor meget fluktuerer S_t)