

Første ordens lineær differentialligning:

$$y' + uy = w$$

hvor u og w er kendte funktioner.

Generel løsningsformel:

$$y = B \exp(-U(t)) + \exp(-U(t)) \int w(t) \exp(U(t)) dt$$

hvor B er en vilkårlig konstant og $U(t)$ er en stamfunktion til $u(t)$.

Det er strengt taget overflødigt at medtage første led (med B) da det ubestemte integral i sidste led implicit indeholder konstant.

Ex:

$$y' + \frac{1}{2}ty = -\frac{1}{2}t$$

har generel løsning:

$$y(t) = B \exp\left(-\frac{1}{4}t^2\right) - 1$$

Check ved indsættelse !

Tilfældet med konstant koefficient $u(t) = a \neq 0$ og højreside $w(t) = b$.

Dermed $U(t) = at$ og

$$\int b \exp(at) dt = \frac{b}{a} \exp(at)$$

og løsning bliver

$$y = B \exp(-at) + \exp(-at) \frac{b}{a} \exp(at) = B \exp(-at) + \frac{b}{a}$$

Tilfældet med konstant koefficient $u(t) = a \neq 0$ og højreside $w(t) = b$.

Dermed $U(t) = at$ og

$$\int b \exp(at) dt = \frac{b}{a} \exp(at)$$

og løsning bliver

$$y = B \exp(-at) + \exp(-at) \frac{b}{a} \exp(at) = B \exp(-at) + \frac{b}{a}$$

Hvis $a = 0$ fås $U(t) = k$ og

$$y = B \exp(-k) + \exp(-k) \int b \exp(k) dt = C + bt$$

Begge formler stemmer med det vi indledningsvist udledte.