

Kiosk-modellen (News vendor's model) og EOQ modellen

Rasmus Waagepetersen
Institut for Matematiske Fag Aalborg Universitet

September 17, 2014

Stokastiske modeller i økonomi

Fundamentale modeller i økonomi (Domar, Solow,...) er deterministiske.

I praksis er næsten alle økonomiske variable stokastiske (tilfældige): aktie-kurser, kort rente, efterspørgsel, råvarepriser....

Derfor er økonometri (statistik og stokastiske modeller i økonomi) et vigtigt emne.

Vi indleder med kort intro til stokastiske variable.

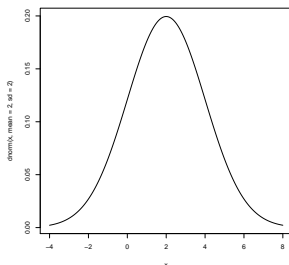
Stokastisk variabel

En stokastisk variabel X benyttes til matematisk modellering af stokastiske fænomener.

Til en stokastisk variabel er tilknyttet en sandsynlighedstæthed (en funktion) som specificerer sandsynligheder for de forskellige værdier, X kan antage.

Eks.: normalfordelt X . Da er sandsynlighedstætheden

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right)$$



Beregning af sandsynligheder og middelværdi (forventet værdi)

Sandsynlighed for, at X falder i intervallet $[a, b]$:

$$P(X \in [a, b]) = \int_a^b f(x)dx$$

Den forventede værdi af X ('vægtet sum af x -værdier'):

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Den forventede værdi af en funktion g af X :

$$\mathbb{E}g(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

Egenskaber ved sandsynlighedstætheder

$$P(X \in] - \infty, \infty[) = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Endvidere $P(X \in [a, b]) \geq 0$ for all $[a, b]$. Dermed $f(x) \geq 0$ for alle x .

Dvs. en sandsynlighedstæthed skal være ikke-negativ og integrere til 1.

Fordelingsfunktion

Fordelingsfunktionen er givet ved

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

Dvs. fordelingsfunktionen er den stamfunktion til f , der opfylder

$$F(\infty) = 1$$

fordi

$$P(X \leq \infty) = 1$$

Ligelig/uniform fordeling

En ligelig fordelt stokastisk variabel X på $[l, u]$ ($l < u$) har tæthedsfunktion:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(u-l)} & \text{for } x \in [l, u] \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Ubestemt integral

$$\int f(x)dx = \frac{x}{l-u} + c$$

Fordelingsfunktionen er den stamfunktion $F(x)$ hvor $F(l) = 0$ og $F(u) = 1$.

Dvs.

$$F(x) = \frac{x-l}{u-l}, \quad x \in [l, u]$$

Avis-sælger model (News vendor model)

q : antal indkøbte aviser (købspris c pr. avis).

D : efterspørgsel (stokastisk variabel med sandsynlighedstæthed f).

p : salgspris.

Antal solgte (stokastisk variabel):

$$A = \min(D, q) = \begin{cases} D & \text{hvis } D < q \\ q & \text{hvis } D \geq q \end{cases}$$

(stykkevis lineær funktion)

Fortjeneste (stokastisk variabel):

$$X = pA - cq$$

Forventet fortjeneste:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X &= p\mathbb{E}A - cq \\ &= p \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \min(x, q) dx - cq \\ &= p \int_{-\infty}^q f(x)x dx + p \int_q^{\infty} qf(x) dx - cq \\ &= p \int_{-\infty}^q f(x)x dx + pq(1 - F(q)) - cq\end{aligned}$$

NB: ovenover svarer $F(q)$ til stamfunktionen for f .

Hvilket antal aviser q maksimerer forventet fortjeneste ?

$$\frac{dEX}{dq} = pf(q)q - pqf(q) + p(1 - F(q)) - c = p - c - pF(q)$$

$$\frac{dEX}{dq} = 0 \Leftrightarrow F(q) = \frac{p - c}{p} \Leftrightarrow q = F^{-1}\left(\frac{p - c}{p}\right) \Leftrightarrow q = F^{-1}\left(1 - \frac{c}{p}\right)$$

$\frac{dEX}{dq} = p - c - pF(q)$ aftagende funktion af q så vi har fundet et entydigt maksimumspunkt.

Opgaver

1. En eksponentialfordelt stokastisk variabel X har sandsynlighedstæthed $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$ for $x > 0$ (og $f(x) = 0$ for $x < 0$) hvor $\lambda > 0$. Eksponentialfordelingen bruges ofte til at modellere tilfældige ventetider - f.eks. ventetider mellem opkald i et call-center og varigheden af opkaldene.
 - 1.1 Check at $f(x)$ opfylder kravene (slide 5) til en sandsynlighedstæthed.
 - 1.2 Lad $\lambda = 2$. Beregn middelværdien μ af X .
 - 1.3 Beregn dernæst sandsynligheden for, at X er mindre end middelværdien (dvs. $X \in [0, \mu]$) når $\lambda = 2$.
2. Gennemgå udledningerne på slide 9 og 10 trin for trin. Skriv udførligt ned, hvilke regler for integration og differentiation, der ligger bag hvert “=”.

3. Lad i avissælger-modellen D have tætheden f for en ligelig fordeling på $[l, u]$. Lad indtil videre $l = 50$ og $u = 80$
- 3.1 Hvad er middelværdien af D ? (det forventede antal solgte aviser)
 - 3.2 Hvad er stamfunktionen til f ?
 - 3.3 Antag $p = 7$ og $c = 5$. Hvad er den optimale værdi af q ?
 - 3.4 Hvad er den forventede fortjeneste når $p = 7$ og $c = 5$?

Wilson's economic order quantity (EOQ) model

Deterministisk model for lager. Der indkøbes en mængde Q af gangen. Når lageret er tomt købes en ny mængde Q (se Figur 4).

Pris for levering af Q :

$$QP + S$$

hvor P er pris pr. mængdeenhed og S er fast gebyr pr. levering.

Lageromkostning pr. år og mængde er H .

Hvad er de samlede lager-omkostninger for et år ?

Antag vi køber n gange. Dvs. der er n perioder fra lageret fyldes, til det er tomt igen. Hvis lageret tømmes med en konstant rate er lagermængden beskrevet ved følgende funktion:

$$L(t) = Q - \frac{nQ}{t}, \quad t \in [0, 1/n]$$

Dvs. lagerprisen over perioden er

$$\int_0^{1/n} HL(t)dt = H[Qt - nQt^2/2]_0^{1/n} = \frac{HQ}{n} - \frac{HQ}{2n} = \frac{HQ}{2n}$$

og lagerprisen for et helt år er $HQ/2$.

Antag totalt forbrug (for et år) er D . Da er total omkostning for et år:

$$T = PD + S\frac{D}{Q} + HQ/2$$

Hvad er nu den optimale mængde Q som giver den laveste total-omkostning ?

Vi opfatter T som en funktion af Q :

$$T = f(Q) = PD + S\frac{D}{Q} + HQ/2$$

Dermed

$$f'(Q) = -S\frac{D}{Q^2} + \frac{H}{2}$$

og

$$f'(Q) = 0 \Leftrightarrow SD = HQ^2/2 \Leftrightarrow Q = \sqrt{2SD/H}$$

Bemærk $f'(Q)$ voksende funktion af Q , dermed er $Q = \sqrt{2SD/H}$ et entydigt minimum (afhænger ikke af P !).

Eksempel: $D=100$, $S=1$, $H=0.5$. $Q = \sqrt{2 \cdot 1 \cdot 100/0.5} = 20$.
 $T(20) = 110$