

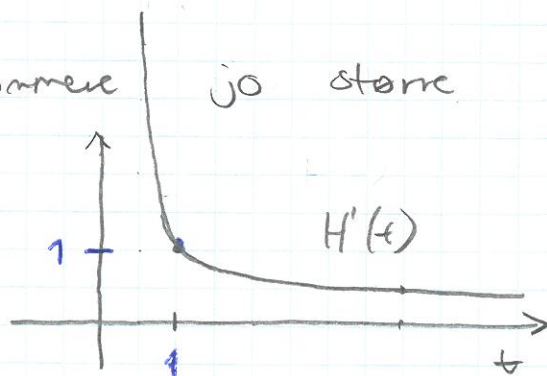
Ex

Differentialligning

$$\frac{dH}{dt} = t^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

H's veksthastighed er $\frac{1}{\sqrt{t}}$ - dvs. H

vokser langsomt og langsomt jo større t er.

Løsning af differentialligning

$$\text{Gæt: } H(t) = \sqrt{t} \Rightarrow H'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \neq$$

$$H(t) = 2\sqrt{t} \Rightarrow H'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \quad \checkmark$$

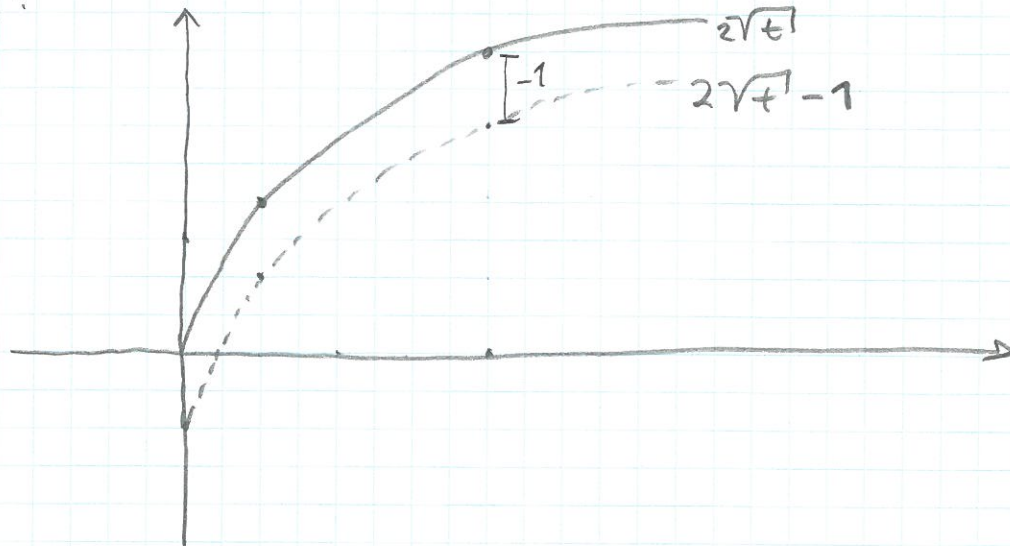
Men $H(t) = 2\sqrt{t} + 3$ også OK!Generel løsning er klasse af funktioner

$$H(t) = 2\sqrt{t} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Vha startbetingelse, f. eks. $H(0) = 3$ kan C fastlægges:

$$H(0) = 3 \Leftrightarrow 2\sqrt{0} + C = 3 \Leftrightarrow C = 3.$$

For forskellige løsninger afjager blot ved parallelforskydning:



Ubestemt integrale - definition.

For en funktion f er det ubestemte integrale

$\int f(x) dx$ defineret som klassen af

funktioner $F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, hvor F

opfylder

$$F'(x) = f(x).$$

F kaldes stamfunktionen til f .

Dis. integralregning modsatte af differentialregning!

Regreregler for ubestemt integrale

Tager udgangspunkt i regler for differentiering:

$$1) \frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$$

$$2) \frac{d}{dx} e^x = e^x$$

$$3) \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

$$4) \frac{d}{dx} (f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$$

$$5) \frac{d}{dx} k f(x) = k f'(x)$$

$$6) \frac{d}{dx} f(x)g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$7) \frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

$$8) \frac{d}{dx} e^{f(x)} = f'(x) e^{f(x)}$$

$$9) \frac{d}{dx} \ln f(x) = f'(x) \frac{1}{f(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$10) \frac{d}{dx} \sin x = \cos x \quad \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

Disse giver umiddelbart regneregler for ubestemte integraller:

$$1) \int x^m dx ? \text{ Gæt } \frac{1}{m+1} x^{m+1} : \frac{d}{dx} \frac{1}{m+1} x^{m+1} + C = \frac{1}{m+1} (m+1) x^m = x^m \checkmark$$

$$2) \int e^x dx = e^x + C$$

$$3) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad (x \neq 0)$$

$$4) \int (f(x) + g(x)) dx = F(x) + G(x) + C$$

$$5) \int k f(x) dx = k F(x) + C$$

$$6) \int f(x) g(x) dx + \int F(x) g'(x) dx \stackrel{4)}{=} \int [f(x) g(x) + F(x) g'(x)] dx \\ = F(x) g(x) + C$$

Disse regler om partiell integration:

$$\int f(x) g(x) dx = F(x) g(x) - \int F'(x) g(x) dx + C$$

Nyttig hvis vi kender $F'(x)$ og $\int F'(x) g(x) dx$ mere simpel end $\int f(x) g(x) dx$!

$$7) \int f'(g(x)) g'(x) dx = f(g(x)) + c$$

eller (erstat f', f med F, F)

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = F(g(x)) + c$$

(reglen om substitution)

$$8) \int f(x) e^{F(x)} dx = e^{F(x)} + c$$

$$9) \int \frac{f(x)}{F(x)} dx = \ln |F(x)| + c \quad (F(x) \neq 0)$$

(8) og 9) følger af tilsvarende 8) og 9) for differentiering. Alternativt rha substitution)

$$10) \int \sin x dx = -\cos x + c \quad \int \cos x dx = \sin x + c$$

NB substitution med variabelskift ~~kan~~ kan give bedre overblik:

$$\int f(g(x)) g'(x) dx \quad \begin{array}{l} u = g(x) \\ du = g'(x) dx \end{array} = \int f(u) du = F(u) + c = F(g(x)) + c.$$

Exempel

$$\int 3x^4 dx$$

$$\int x\sqrt{x} dx$$

$$\int [4x^2 - 7x^3] dx$$

$$\int 4xe^{x^2} dx$$

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx$$

$$\int \frac{12x^2}{x^3+1} dx$$

$$\int e^x x dx$$

$$\int e^x x^2 dx$$

$$\int 6x^2 (4+x^3)^5 dx$$

$$\int \ln(x) dx = \int 1 \cdot \ln(x) dx$$

$$\int x \ln x^2 dx$$

NB Godt at kunne basale regneregler!

I praksis mødes ofte integraler som
må løses via integraltabel eller computer -
men basale regneregler nødvendige for at
finde korrekte formel.

$$\text{Fx: } \int \frac{3}{9+x^2} + 4x^2 dx \quad ?$$

$$\text{Tabelopslag: } \int \frac{1}{a^2+u^2} du = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + C$$

Nødt til at kende basale regneregler for
tabelopslag kan benyttes!

Bestemt integrale

1

Definition

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \text{hvor } F \text{ er stam-}$$

funktion til f .

NB: bestemt integrale er et tal hvor
ubestemt integrale er en klasse af
funktioner

Men relateret via stamfunktion.

Benytter ofte notation $[F(x)]_a^b$ som mellemregning.

$$\begin{aligned} \underline{\text{Ex}} \quad \int_1^3 x^2 dx &= \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_1^3 = \frac{1}{3} 3^3 - \frac{1}{3} 1^3 \\ &= 9 - \frac{1}{3} = 8 \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

Bestemt integrale - fortolkning som areal

2



$A =$ areal under f 's graf (og afgrænset til venstre og højre ved a og b)

$$A \approx f(x_1) \cdot (x_2 - x_1) + f(x_2)(x_3 - x_2) + f(x_3)(x_4 - x_3) \\ = \sum_{i=1}^3 f(x_i) \Delta x_i \quad (\Delta x_i = x_{i+1} - x_i)$$

mere generelt (n delpunkter)

$$A \approx \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i \quad \text{og} \quad A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$$

(NB: grænseværdi OK hvis f (stykvis) kontinuert!)

(NB: kan både bruge venstre, højre og midtpunkter som x_i !)

Notation

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$$

$\downarrow \quad \quad \downarrow$

$$\int_a^b f(x) dx$$

} "idealisiert sum"

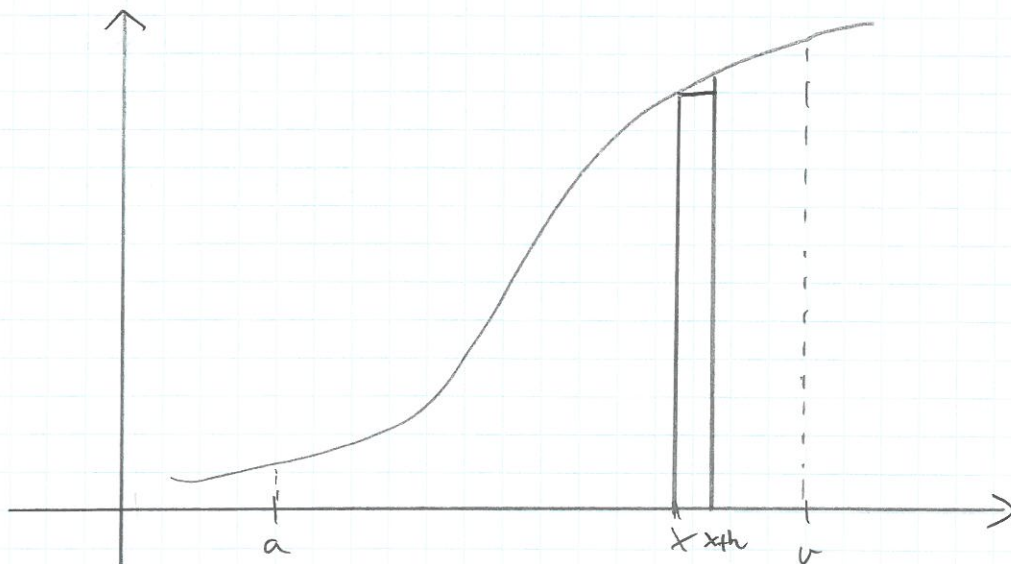
3

Der golden

$$A = \int_a^b f(x) dx \quad ! \quad :$$

Definieren

$A(x)$ = areal under kurve fra a til x



Viser $A'(x) = f(x)$ (dvs $A(x) = F(x)$)

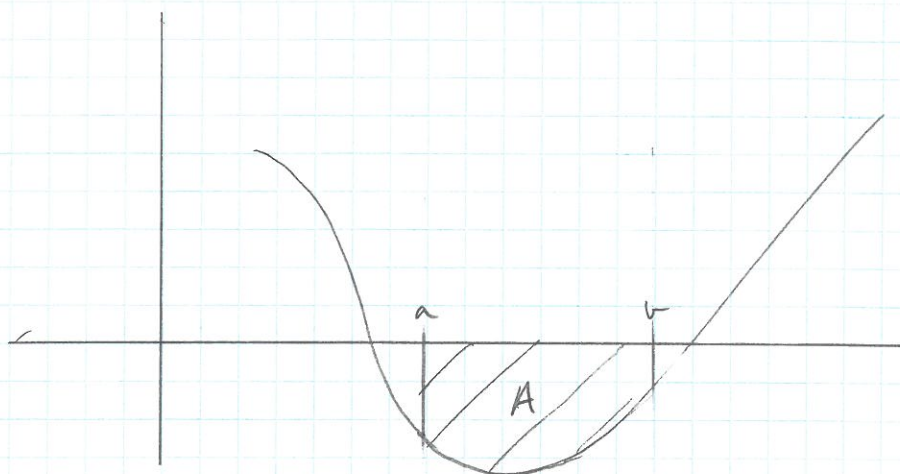
$$A'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(x) + h \cdot f(x) - A(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h f(x)}{h} = f(x) !$$

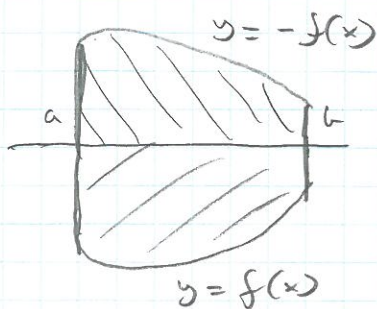
Dus $A(x) = F(x) + c$ $\Rightarrow$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = A(b) - A(a) = A(b) - 0 = A \quad \checkmark$$

Negativ f:



$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= F(b) - F(a) = -(-F(b) - (-F(a))) \\ &= - \int_a^b \underbrace{(-f(x))}_{>0} dx = -A \end{aligned}$$



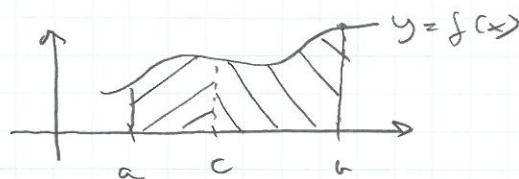
Dus integral of negativ fkt = - area over funktionens graf!

Rechenregeln

5

$$1) \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad a < b < c$$

$$2) \int_a^a f(x) dx = 0$$



$$3) \int_b^a f(x) dx = F(a) - F(b) = -F(b) - (-F(a)) \\ = - \int_a^b f(x) dx$$

$$4) \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

$$5) \int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$6) \int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

$$7) \int_a^b f(x) g(x) dx = \left[F(x) g(x) \right]_a^b - \int_a^b F(x) g'(x) dx$$

$$\underline{Ex}$$

$$\int_1^2 \exp(-2x^2) 6x \, dx$$

$$\int_{-2}^2 (x^2 - 1) \, dx$$

$$\int_{-1}^1 x^3 \, dx$$

$$\int_0^1 x e^x \, dx$$