Simultaneous equations (koblede ligninger)

Example

$$x_{t+1} + x_t + 2y_t = 24$$
$$y_{t+1} + 2x_t - 2y_t = 9 \qquad (*)$$

La $u_t = \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}$ $\quad u_{t+1} = \begin{bmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{bmatrix}$

Da er $(*)$ ekvivalent med

$$I\,u_{t+1} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}}_{K} u_t = \begin{bmatrix} 24 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Partikulær løsning $u_t = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$:

$$\left(I + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Løsning hvis $|I + K| \neq 0$.

$$|I + K| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 4 = -6 \quad \checkmark$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 24 \\ 2 & -1 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & 24 \\ 0 & -3 & -15 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & 24 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Dvs $\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$

Næste trin: Løse homogene ligning

$$I\, u_{t+1} + K\, u_t = 0$$

Gæt $\quad u_t = \begin{bmatrix} n\, b^t \\ m\, b^t \end{bmatrix}$

Indsætter:

$$I \begin{bmatrix} n\, b^{t+1} \\ m\, b^{t+1} \end{bmatrix} + K \begin{bmatrix} n\, b^{t} \\ m\, b^{t} \end{bmatrix} = 0 \iff \left(I b + K \right) \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = 0$$

For givet b fås kun ikke-triviel løsning mht $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$ hvis $\left| I b + K \right| = 0$:

$$\left| I b + K \right| = \begin{vmatrix} b+1 & 2 \\ 2 & b-2 \end{vmatrix} = (b+1)(b-2) - 4 =$$

$$b^2 - 2b + b - 2 - 4 = \underline{\underline{b^2 - b - 6}}$$

$D = 1 - 4(-6) = 25 \quad$ Dvs. 2 rødder

$$b_1 = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3 \qquad b_2 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -2.$$

Kan nu løse mht n, m for henholdsvis $b = b_1$ og b_2:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{dvs} \quad n + \tfrac{1}{2} m = 0 \iff n = -\tfrac{1}{2} m$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{dvs} \quad n - 2m = 0 \iff n = 2m$$

Dermed

$$u_t = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} m_1 \lambda_1^t \\ m_1 \lambda_1^t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2m_2 \\ m_2 \end{bmatrix} \lambda_2^t$$

Hvis f. eks. $u_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$:

$$-\frac{1}{2} m_1 + 2m_2 = 1$$

$$m_1 + m_2 = 3$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 0 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$m_1 = 2$$

$$m_2 = 1$$

Dvs. løsning $\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} 3^t + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} (-2)^t$

Indsætter og checker:

$+2(-2)^t$

a) $7 + (-1)3^{t+1} + 2(-2)^{t+1} + 7 + (-1)3^t + 2(5 + 2 \cdot 3^t + (-2)^t)$

$= 24 + 3^t \underbrace{(-3 - 1 + 4)}_{=0} + (-2)^t(-4 + 2 + 2) = 24$ ✓

b) $5 + 2\,3^{t+1} + (-2)^{t+1} + 2(7 - 3^t + 2(-2)^t) - 2(5 + 2\,3^t + (-2)^t) =$

$9 + 3^t(32 - 2 - 4) + (-2)^t(-2 + 4 - 2) = 9$ ✓