Uegentligt integral

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$ (hvis grenseværdi eksisterer)

Ex

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} -b^{-1} - (-1) = \lim_{b\to\infty} 1 - b^{-1} = 1$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \ln(b) - 0 = \infty \Rightarrow \text{divergent !}$$

(Tilsvarende for $\int_{-\infty}^{b}$ og $\int_{-\infty}^{\infty}$)

Uendelig integrand

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx \quad ? \qquad \frac{1}{0} = \infty \;!$$

$$\lim_{b\to 0} \int_b^1 \frac{1}{x} = \lim_{b\to 0} 0 - \ln b = \infty$$ dvs divergent !

$2\sqrt{x}$ $\quad 2x^{\frac{1}{2}}$ $\quad \frac{1}{2}\cdot 2x^{-\frac{1}{2}}$

Men : $$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \lim_{b\to 0} 2 - 2\sqrt{b} = 2$$ ✓

Problem : $\frac{1}{x}$ går for hurtigt mod ∞ når $x \to 0$

$x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ går tilpas langsomt mod ∞.

Anvendelser af integralregning

Investering / kapital

$I(t)$ nettoinvestering pr. tidsenhed

$K(t)$ kapital ——"——

Dvs $K'(t) = I(t) \Rightarrow K(t) = \int_0^t I(u)\,du + \underbrace{K(0)}_{\text{kapital til tid } 0}$

Nutidsværdi af pengestrøm fra 0 til T.

Pengestrøm pr. tidsenhed : $R(t)$

Lad $\Delta t = \frac{T}{n}$ og $t_i = i \cdot \Delta t$ $\quad (t_n = T)$

Pengestrøm i interval $[t_i, t_{i+1}[\; \approx R(t_i)\Delta t$

Antag rente over Δt er $r\Delta t$

Nutidsværdi af $R(t_i)\Delta t = R(t_i)\Delta t\,(1 + r\Delta t)^{-i}$

Nutidsværdi af samlet pengestrøm $\approx$

$$\sum_{i=1}^{n} R(t_i)(1 + r\Delta t)^{-i}\Delta t$$

Kontinuert-tids analogi

Modtage $R(t)dt$ i uendeligt kort interval $[t, t+dt[$

Nutidsværdi $R(t)\,e^{-rt}\,dt$

Nutidsværdi af pengestrøm fra 0 til T:

$$\int_0^T R(t)e^{-rt}\,dt$$

Nutidsværdi af konstant pengestrøm D pr. tidsenhed:

$$\int_0^T D e^{-rt} dt = D\left[-\frac{1}{r} e^{-rt}\right]_0^T = -\frac{D}{r}\left[e^{-rT} - e^{-0}\right]$$

$$= \frac{D}{r}\left[1 - e^{-rT}\right]$$

Værdi af evig pengestrøm $(T \to \infty)$:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{D}{r}\left[1 - e^{-rT}\right] = \frac{D}{r}$$

Vinlager med lageromkostninger

Værdi til tid t: $V(t)$ (f.eks. $V(t) = K e^{\sqrt{t}}$)

Nutidsværdi $e^{-rt} V(t)$

Lageromkostning s pr. tidsenhed.

Nutidsværdi af totale lageromkostninger op til tid t:

$$\int_0^t s e^{-ru} du = \frac{s}{r}\left[1 - e^{-rt}\right]$$

Netto-nutidsværdi af lager:

$$N(t) = V(t) e^{-rt} - \frac{s}{r} + \frac{s}{r} e^{-rt}$$

$$= e^{-rt}\left[V(t) + \frac{s}{r}\right] - \frac{s}{r}$$

Find max-værdi for $N(t)$:

$$N'(t) = -re^{-rt}\left[V(t) + \frac{s}{r}\right] + e^{-rt}\,V'(t)$$

$$N'(t) = 0 \iff -rV(t) - s + V'(t) = 0 \iff$$

$$V'(t) = rV(t) + s \iff$$

$$V'(t)\,dt = rV(t)\,dt + s\,dt$$

Dvs. optimalt t hvor værditilvækst præcis svarer til inflations-tab og lagerudgift.

($rV(t)\,dt$ er renteindtægten over tidsrummet dt: $(1+r\,dt)V(t) - V(t) = V(t)\,r\,dt$)

$$\left(e^{r\,dt}\,V(t) \approx (1 + r\,dt)\,V(t) \right)$$