Differentialligninger

Domars model $\Rightarrow \frac{1}{s}\frac{dI}{dt} = \rho I \iff \frac{dI}{dt} - s\rho I = 0$

Eksempel på første ordens differentialligning (kun første ordens afledede optræder)

Lineær 1. ordens: (første-ordens afledede)
(og ingen potenser af $\frac{dy}{dt}$ eller y)

$$\frac{dy}{dt} + u(t)y = w(t) \quad (u(t) \text{ og } w(t) \text{ kendte})$$

Ser først på tilfældet $u(t) = a$ og $w(t) = b$

(konstant koefficient og konstant højreside)

Homogene tilfælde $b = 0$ (som Domar)

$$\frac{dy}{dt} + ay = 0 \iff \frac{dy}{dt}\Big/y = -a \iff \frac{d}{dt}\ln y(t) = -a$$

$$\iff \ln y(t) = -at + c \iff y(t) = \underbrace{A}_{\exp(c)}\exp(-at) \quad A \in \mathbb{R}$$

$A \in \mathbb{R}$: generel løsning

$A = Y(0) \Rightarrow$ særskilt løsning

Ikkehomogene tilfælde

$$\frac{dy}{dt} + ay = b$$

Generel Løsning $y = \underbrace{y_c}_{\text{Løsning til homogen ligning}} + \underbrace{y_p}_{\text{særskilt løsning}}$

$$\frac{dy}{dt} + ay = 0$$

1) $\underline{a \neq 0}$ Gæt: $y_p = k$ $\quad \frac{dy_p}{dt} + ay_p = b \Leftrightarrow$

$$ak = b \Leftrightarrow k = \frac{b}{a}$$

Den generel løsning $y = Ae^{-at} + \frac{b}{a}$ $\quad A?$

Givet begyndelsestilstand $y(0) = y_0$ har vi

$$y(0) = y_0 \Leftrightarrow y_0 = Ae^{-a0} + \frac{b}{a} \Leftrightarrow A = \left(y_0 - \frac{b}{a}\right)$$

Den særskilt løsning med givne begyndelsesbet. er

$$y(t) = \left(y_0 - \frac{b}{a}\right)e^{-at} + \frac{b}{a}$$

Ex

$$8\frac{dy}{dt} + 16y = 48 \qquad y(0) = 10$$

$$y(t) = \left(10 - \frac{6}{2}\right)e^{-2t} + \frac{6}{2} = 7e^{-2t} + 3. \qquad \square$$

2) $a = 0$

$$\frac{dy}{dt} = b \iff y(t) = \underbrace{bt}_{y_p} + \underbrace{A}_{y_c}$$

y_p: særskilt løsning

y_c : løsning til homogene ligning $\frac{dy}{dt} = 0$

Ex

$$\frac{dy}{dt} = 2 \qquad y(0) = 5 \qquad y(t) = 5 + 2t$$

Tidsdynamik for markedspris

$$Q_d = \alpha - \beta P \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$$
$$Q_s = -\gamma + \delta P$$

Ligevægtspris $(Q_d = Q_s)$ $\quad P^* = \dfrac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$

Antag pris udvikler sig over tid:

$$\underbrace{\frac{dP}{dt} = j\,(\overbrace{Q_d - Q_s}^{\text{overskydende efterspørgsel}})}_{\text{fortolkning}} = j\alpha - j\beta P + j\gamma - j\delta P$$
$$= j(\alpha+\gamma) - jP(\beta+\delta)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dP}{dt} + j(\beta+\delta)P = j(\alpha+\gamma) \quad \Big]\ \text{1. ordens lineær}$$

$$\Leftrightarrow \quad P(t) = \left[P(0) - \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\right] e^{-j(\beta+\delta)} + \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$$
$$= \underbrace{\left[P(0) - P^*\right] e^{-j(\beta+\delta)}}_{y_c \,=\, \text{afvigelse fra ligevægt}} + \underbrace{P^*}_{y_p \,=\, \text{ligevægt}}$$

Dvs hvis $\beta+\delta > 0$ har vi $P(t) \to P^*$

$\beta+\delta > 0$ ok når β og δ begge positive

Variabel koefficient og højreside

$$\frac{dy}{dt} + u(t)y = w(t)$$

Homogene tilfælde $w(t) = 0$:

$$\frac{dy}{dt}\Big/ y = -u(t) \Leftrightarrow \ln y = -\int u(t)dt + c \Leftrightarrow$$

$$y = A\exp\left(-\int u(t)dt\right)$$

Ex

$$5\frac{dy}{dt} = 5ty \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = ty \Leftrightarrow$$

$$\frac{dy}{dt} \overbrace{-t}^{u(t)}y = 0$$

$$y = A\exp\left(\int t\,dt\right) = A\exp\left(\tfrac{1}{2}t^2\right)$$

Check $\quad \dfrac{dy}{dt} = \underbrace{A\exp\left(\tfrac{1}{2}t^2\right)}t = yt$ ✓

Ikke homogene tilfælde $w(t) \neq 0$

$$y(t) = y_c + y_p = e^{-\int u(t)\,dt}\left(A + \int w(t) e^{\int u(t)dt}\,dt\right)$$

Ex

$$2\frac{dy}{dt} + ty + t = 0 \iff \frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}ty = -\frac{1}{2}t$$

$$y(t) = e^{-\int \frac{1}{2}t\,dt}\left(A + \int -\frac{1}{2}t\, e^{\int \frac{1}{2}t\,dt}\,dt\right)$$

$$= e^{-\left(\frac{1}{4}t^2 + k\right)}\left[A - \int \frac{1}{2}t\, e^{\frac{1}{4}t^2 + k}\,dt\right]$$

$$= e^{-\left[\frac{1}{4}t^2 + k\right]}\left[A - \left[e^{\frac{1}{4}t^2 + k} + c\right]\right]$$

$$e^{-\left(\frac{1}{4}t^2 + k\right)}\left[A - c\right] - 1 = \tilde{A}e^{-\frac{1}{4}t^2} - 1$$

Check : $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2}t\tilde{A}\,e^{-\frac{1}{4}t^2}$

$$2\frac{dy}{dt} + ty + t = -t\tilde{A}e^{-\frac{1}{4}t^2} + t\tilde{A}e^{-\frac{1}{4}t^2} - t + t = 0 \checkmark$$

Udledning af generel løsningsform (hurtig version af 15.4)

$$\frac{dy}{dt} + u(t)y = w(t) \Leftrightarrow e^{\int u(t)\,dt}\frac{dy}{dt} + u(t)e^{\int u(t)\,dt}y = w(t)e^{\int u(t)\,dt}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left[y \cdot e^{\int u\,dt}\right] = w(t)e^{\int u(t)\,dt}$$

$$\Leftrightarrow y \cdot e^{\int u\,dt} = \int w(t)e^{\int u(t)\,dt}\,dt + A$$

$$\Leftrightarrow y = e^{-\int u\,dt}\left(A + \int w(t)e^{\int u\,dt}\,dt\right)$$

$\square$

Konstant koeff / højre side:

$$y = e^{-at}\left(A + \int b e^{+at}\,dt\right) =$$

$$Ae^{-at} + e^{-at}\frac{b}{a}e^{at} = Ae^{-at} + \frac{b}{a} \checkmark$$

b = 0: $y(t) = Ae^{-at}$ ✓

a = 0: $y = e^{0}\left(A + \int b e^{0}\,dt\right) = 1(A + bt)$

$= A + bt$

✓

Separable variable

$$f(y)\frac{dy}{dt} = g(t)$$

Sæt $y = h(t)$ dt.

Dermed er ligningen $f(h(t))\,h'(t) = g(t)$

Dvs $\int f(h(t))\,h'(t)\,dt = \int g(t)\,dt \iff$

$$F(h(t)) = \int g(t)\,dt$$

Vi kan også bruge $y = h(t)$ og $dy = h'(t)\,dt$ notation:

$$\int f(y)\,dy = \int g(t)\,dt$$

Det begrunder følgende notering af ligningen:

$$f(y)\frac{dy}{dt} = g(t) \iff f(y)\,dy = g(t)\,dt$$

(Dvs. vi regner med $\frac{dy}{dt}$ som kvotient af infinitesimale størrelser dy og dt)

<u>Ex</u> $\quad 2t\,dy - y\,dt = 0 \overset{(yt \neq 0)}{\iff} 2\frac{1}{y}\,dy = \frac{1}{t}\,dt \iff$

$$2\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{1}{t}\,dt \iff 2\ln y = \ln t + c \iff y^2 = \exp(\ln t + c)$$

$$\iff y = \sqrt{At}$$

Check: $\frac{dy}{dt} = \frac{A}{2\sqrt{At}} \qquad 2\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = \frac{2}{\sqrt{At}}\frac{A}{2\sqrt{At}} = \frac{1}{t}$ ✓

Ex

$$3y^2\,dy - t\,dt = 0 \iff 3y^2\,dy = t\,dt$$

$$\iff 3\int y^2\,dy = \int t\,dt \iff y^3 = \frac{1}{2}t^2 + c$$

$$\iff y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}t^2 + c} = \left(\frac{1}{2}t^2 + c\right)^{\frac{1}{3}}$$

Check

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}t^2 + c\right)^{-\frac{2}{3}} t$$

$$3y^2\,\frac{dy}{dt} = 3\left(\frac{1}{2}t^2 + c\right)^{\frac{2}{3}} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}t^2 + c\right)^{-\frac{2}{3}} t = t$$