Højere ordens differentialligninger

$y = f(t)$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f''(t) \quad : \text{"vækstratens vækstrate"}$$

2. ordens differentialligning : $\frac{d^2y}{dt^2} = kY$

Dvs. 2. afledet proportional med aktuel funktionsværdi Y.

n'te ordens lineær diff-ligning:

$$\frac{d^ny}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dy}{dt} + a_n y = b$$

Vi begrænser os til 2. ordens lineær:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 dy = b.$$

Igen: generel løsning på form

$$y = \underbrace{y_c}_{\substack{\text{løsning til} \\ \text{homogene ligning } (b=0) \\ \text{(komplementære løsning)}}} + \underbrace{y_p}_{\text{partikulær løsning}}$$

Finder først y_p $(b \neq 0)$

Tre tilfælde : a) $a_2 \neq 0$ b) $a_2 = 0 \wedge a_1 \neq 0$ c) $a_2 = a_1 = 0$

a) $a_2 \neq 0$. Gæt $y = k \Rightarrow y' = \frac{dy}{dt} = 0$ og $y'' = \frac{d^2y}{dt^2} = 0$

Dvs $a_2 k = b \iff k = \frac{b}{a_2}$

Dvs $y_p = \frac{b}{a_2}$

b) $a_2 = 0$ og $a_1 \neq 0$. Gæt $y = k$

Dvs. $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$. Du ikke da $b \neq 0$.

Nyt gæt : $y = kt \Rightarrow y' = k$ og $y'' = 0$

Dvs $a_1 k = b \iff k = \frac{b}{a_1}$

Dermed $y_p = \frac{b}{a_1} t$.

c) $a_2 = a_1 = 0$ Dvs $y'' = b$.

Oplagt $y_p = \frac{1}{2} b t^2$ (check ved at differentiere)

Dvs mangler nu at løse homogene ligning

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0.$$

Eksponentialfkt. har tidligere (1. ordens lineære diff-ligninger) vist sig at spille nøglerolle.

Dvs gæt for løsning til homogene ligning er
$y = Ae^{rt}$.

$y' = rAe^{rt}$ $\quad y'' = r^2 Ae^{rt}$ $\Big\}$ indsættes i homogene ligning

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = r^2 Ae^{rt} + a_1 r Ae^{rt} + a_2 Ae^{rt} = 0 \iff$$

$$Ae^{rt}(r^2 + a_1 r + a_2) = 0 \iff r^2 + a_1 r + a_2 = 0$$

(da $Ae^{rt} \neq 0$)

Løsning af 2. gradsligning $r^2 + a_1 r + a_2 = 0$:

$D = \text{"}B^2 - 4AC\text{"} = a_1^2 - 4a_2$.

Tre tilfælde I) $D > 0 \Rightarrow$ 2 rødder

II) $D = 0 \Rightarrow$ dobbeltrod

III) $D < 0 \Rightarrow$ ingen reelle rødder.

Ser først på I og II. Vender senere tilbage til III vha komplekse løsning.

I $D > 0$

Rødder $r_1 = \dfrac{-a_1 + \sqrt{D}}{2}$ $r_2 = \dfrac{-a_1 - \sqrt{D}}{2}$

Dvs 2 løsninger $y_1 = A_1 e^{r_1 t}$ og $y_2 = A_2 e^{r_2 t}$

Hvilken skal vi vælge?

Introducer begyndelses betingelse $y(0) = y_0$. Så kan vi konkludere $A_1 = A_2 = y_0$. Men stadig 2 muligheder $y_1 = y_0 e^{r_1 t}$ og $y_2 = y_0 e^{r_2 t}$.

Introducer yderligere begyndelsesbetingelse $y'(0) = v_0$. Bemærk $y_1'(0) = y_0 r_1$ og $y_2'(0) = y_0 r_2$

Dvs vælg y_1 hvis $y_0 r_1 = v_0$ og y_2 hvis $y_0 r_2 = v_0$.

Men hvad hvis hverken $y_0 r_1 = v_0$ eller $y_0 r_2 = v_0$?

Observation: y_1 og y_2 løsning til homogen ligning

$\Rightarrow$ $y_1 + y_2 = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$ løsning til homogen ligning.

Med $y = y_1 + y_2$ har vi $y(0) = A_1 + A_2$ og

$y'(0) = r_1 A_1 + r_2 A_2$

Dvs for alle begyndelsesbetingelser $y(0) = y_0$ og $y'(0) = v_0$

kan vi finde løsning (2 ligninger - 2 ubekendte A_1 og A_2)

Ex $\quad y'' + y' - 2y = -10 \qquad y(0) = 12 \quad y'(0) = -2$

$D = 1 - 4(-2) = 9 \qquad y_p = \frac{-10}{-2} = 5$

$r_1 = \frac{-1+3}{2} = 1 \qquad r_2 = \frac{-1-3}{2} = -2$

$$y = A_1 e^{t} + A_2 e^{-2t} + 5$$

Finder A_1 og A_2 :

$$\begin{aligned} y(0) &= A_1 + A_2 + 5 = 12 \\ y'(0) &= A_1 - 2A_2 = -2 \end{aligned} \iff \begin{aligned} A_1 + A_2 &= 7 \\ A_1 - 2A_2 &= -2 \end{aligned}$$

$$\iff \begin{aligned} A_1 + A_2 &= 7 \\ -3A_2 &= -9 \end{aligned} \iff \begin{aligned} A_1 &= 4 \\ A_2 &= 3 \end{aligned}$$

Då $\quad y = 4e^{t} + 3e^{-2t} + 5$

Check: $\quad y' = 4e^{t} - 6e^{-2t}$

$\qquad\quad y'' = 4e^{t} + 12e^{-2t}$

$$y'' + y' - 2y = \cancel{4e^{t}} + \cancel{12e^{-2t}} + \cancel{4e^{t}} - \cancel{6e^{-2t}} - \cancel{8e^{t}} - \cancel{6e^{-2t}} - 10$$

$$= -10 \quad \checkmark$$

II $D=0$ (dobbeltrod)

$$r_1 = r_2 = r = \frac{-a_1}{2}$$

Da $y_1 = A_1 e^{rt}$ er en løsning.

Men faktisk er $y_2 = A_2 t e^{rt}$ også en løsning (check ved at sætte ind).

Så igen kræves to begyndelsesbetingelser $y(0) = y_0$ og $y'(0) = V_0$ for at fastlægge entydig løsning.

Så som før benyttes $y = y_1 + y_2 =$

$$A_1 e^{rt} + A_2 t e^{rt}.$$

Eksempel $\quad y'' - 6y' + 9y = 5 \quad y(0) = 2 \quad y'(0) = 2$

Partikulær løsning $y_p = \frac{5}{9}$

$D = 36 - 4 \cdot 9 = 0 \qquad r = \frac{-(-6)}{2} = 3.$

Løsning til homogen: $y_c = A_1 e^{3t} + A_2 t e^{3t}$

Da generel løsning $y = y_p + y_c = \frac{5}{9} + A_1 e^{3t} + A_2 t e^{3t}$

Bemærk $y'(t) = 3A_1 e^{3t} + A_2 e^{3t} + A_2 t 3 e^{t}$.

Fastlægger A_1 og A_2 :

$$y(0) = \frac{5}{9} + A_1 = 2 \iff A_1 = \frac{13}{9}$$

$$y'(0) = 3A_1 + A_2 = 2 \iff \frac{39}{9} + A_2 = \frac{18}{9} \iff A_2 = \frac{-21}{9}$$

$$\iff A_2 = \frac{-7}{3}.$$

Dvs : $y = \frac{5}{9} + \frac{13}{9}e^{3t} - \frac{7}{3}te^{3t}$

Check : $y'(t) = \frac{13}{3}e^{3t} - \frac{7}{3}\left(e^{3t} + 3te^{3t}\right)$

$$y''(t) = 13e^{3t} - \frac{7}{3}\left(3e^{3t} + 3e^{3t} + 9te^{3t}\right)$$

$$y'' - 6y' + 9y = \cancel{13e^{3t}} - \cancel{7e^{3t}} - \cancel{7e^{3t}} - \cancel{21te^{3t}} +$$

$$-\cancel{26e^{3t}} + \cancel{14e^{3t}} + \cancel{42te^{3t}} +$$

$$5 + \cancel{13e^{3t}} - \cancel{21te^{3t}} = 5 \quad \checkmark$$

Komplekse tal

Problem: når $D<0$ kan vi ikke finde reelle rødder

$$r = \frac{-a_1 \pm \sqrt{D}}{2}.$$

Løsning: brug større mængde af tal (de komplekse tal) hvor $\sqrt{D}$ giver mening selvom $D<0$.

Forhåbentligt giver resultatet også praktisk mening!

Analogi: negative tal. F.eks. læst $5-7=-2$

men -2 kan ikke gives håndgribelig fortolkning (ved godt hvad 2 æbler er, men hvad er -2 æbler). Kan tænke på -2 som "gæld"/"noget vi skylder.

Under alle omstændigheder praktisk i mellemregninger. Kan regne videre selv om beregninger undervejs af typen $x-y$ hvor $y>x$.

Komplekse tal : udvidelse af reelle tal med tilhørende regneoperationer.

Komplekst tal : realdel h og imaginær del v
Dvs. kan noteres som vektor (h, v).

Imaginære enhed $i = (0,1)$.
Reelt tal h = komplekse tal $(h, 0)$.

Regnearter :

Addition : $(h,v) + (a,b) = (h+a, v+b)$

Multiplikation : $(h,v) \cdot (a,b) = (ha - vb, hb + va)$

$\uparrow$

ikke skalarprodukt

Ex: $i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (0-1, 0+0) = (-1, 0)$

NB : hvis v og b er nul (dvs reelle tilfælde)

fås
$(h,0)\cdot(a,0) = (ha, 0)$ og
$(h,0) + (a,0) = (h+a, 0)$.

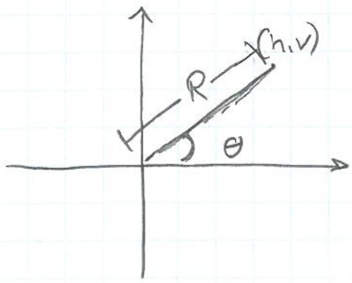
Dvs tilbage til de sædvanlige regnearter!

Viser at komplekse tal udvidelse af de reelle tal.

Alternativ notation : $(h,v) = h + iv$

Dermed $(h,v)(a,b) = (h+iv)(a+ib) = ha + ihb + iva + i^2 vb$
$= ha - vb + i(hb+va) = (ha-vb, hb+va)$

Polære koordinater



$$(h,v) = (R\cos\theta,\ R\sin\theta)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left[\frac{v}{h}\right] \qquad R = \sqrt{h^2+v^2}$$

Dvs polær repræsentation af (h,v) er $(\theta, R)_{pol}$

$$h + iv = R\cos\theta + iR\sin\theta = R\underbrace{\left[\cos\theta + i\sin\theta\right]}_{\text{kompleks eksponential-funktion } e^{i\theta}}$$

$$= R\,e^{i\theta}$$

Sædvanlig regel for eksponentialfkt gælder også for kompleks eksponentialfkt:

$$e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta}e^{i\varphi} \quad \text{og} \quad (e^{i\theta})^{\varphi} = e^{i\theta\varphi}$$

F.eks. potens af komplekst tal:

$$(h+iv)^n = (Re^{i\theta})^n = R^n e^{in\theta}$$

NB: $\exp(-i\theta) = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) =$

$$\cos\theta - i\sin\theta.$$

Vender tilbage til differentialligning og $D<0$.

III $D<0$

Bemærk $D = -|D| = i^2|D|$. Den komplekse kvadratrod af D er $i\sqrt{|D|} = i\sqrt{4a_2 - a_1^2}$

Dermed rødder $r_1 = \dfrac{-a_1 + i\sqrt{4a_2-a_1^2}}{2}$ $r_2 = \dfrac{-a_2 + i\sqrt{4a_2-a_1^2}}{2}$

$r_1 = h + iv$ hvor $h = -\dfrac{a_1}{2}$ og $v = \dfrac{\sqrt{4a_2-a_1^2}}{2}$ og

$r_2 = h - iv$.

Som i tilfældet I får vi dermed 2 løsninger $y_1 = A_1 e^{r_1 t}$ og $y_2 = A_2 e^{r_2 t}$ som kombineres til

$$y_c = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} = A_1 e^{ht} e^{ivt} + A_2 e^{ht} e^{-ivt}$$

$$= A_1 e^{ht}[\cos(vt) + i\sin(vt)] + A_2 e^{ht}[\cos(vt) - i\sin(vt)]$$

$$= (A_1 + A_2) e^{ht}\cos(vt) + i(A_1 - A_2) e^{ht}\sin(vt)$$

$$= A_5 e^{ht}\cos(vt) + A_6 e^{ht}\sin(vt)$$

NB: reel løsning hvis A_5 og A_6 reelle.

Hvis begyndelsesbetingelse $y(0) = y_0$ og $y'(0) = v_0$ reelle bliver A_5 og A_6 også reelle.

Ex

$$y'' + 2y' + 17y = 34 \qquad y(0) = 3 \qquad y'(0) = 11$$

$$y_p = \frac{34}{17} = 2 \qquad D = 4 - 4 \cdot 17 = -64 < 0$$

$$r_1 = \frac{-2}{2} + \frac{i\,8}{2} = -1 + 4i \qquad r_2 = -1 - 4i$$

Dvs $y = A_5 e^{-t} \cos 4t + A_6 e^{-t} \sin 4t + 2$

$$y'(t) = -A_5 e^{-t} \cos 4t - 4A_5 e^{-t} \sin 4t - A_6 e^{-t} \sin 4t + 4A_6 e^{-t} \cos 4t$$

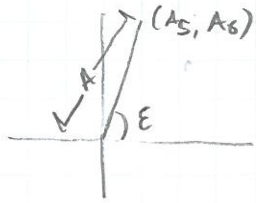
$$= (4A_6 - A_5) e^{-t} \cos 4t - (4A_5 + A_6) e^{-t} \sin 4t.$$

Dvs $y(0) = A_5 + 2 = 3 \iff A_5 = 1$

$$y'(0) = 4A_6 - A_5 = 11 \overset{A_5 = 1}{\iff} A_6 = 3.$$

Dvs
$$y(t) = e^{-t} \left(\cos 4t + 3 \sin 4t \right) + 2.$$

Yderligere omskrivning:



$$(A_5, A_6) = (1, 3) = (A \cos \varepsilon, A \sin \varepsilon)$$

$$A = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \qquad \varepsilon = \tan^{-1} 3 = 1.25$$

(16.16)

$$1 \cdot \cos 4t + 3 \sin 4t = A \cos \varepsilon \cos 4t + A \sin \varepsilon \sin 4t =$$

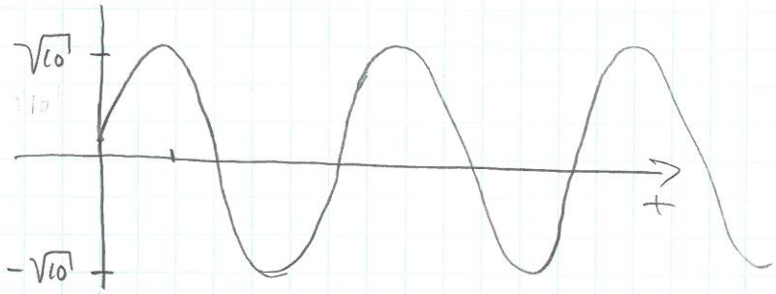
$$A \cos(\varepsilon - 4t) = \sqrt{10} \cos(1.25 - 4t)$$

NB: regner i radian – ikke 360° vinkler!

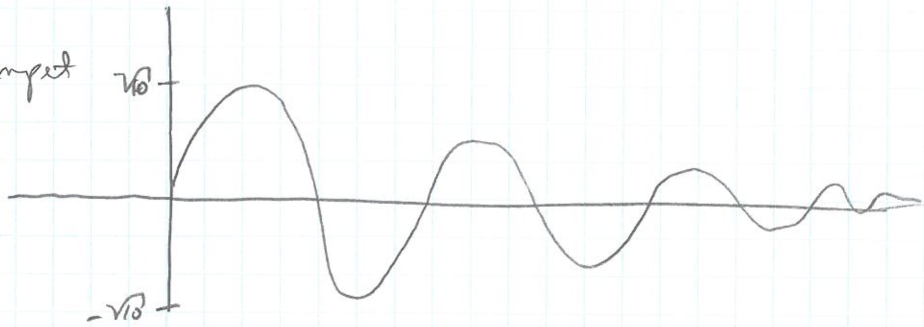
Dvs løsning $y(t)$: eksponentielt dempet cosinusbølge $\underbrace{\sqrt{10}}_{\text{amplitude}} \cos(1.25 - 4t)$

amplitude fase frekvens

Cosinusbølge



Eksponentielt dempet



Dvs. over tid konvergerer $y(t)$ mot 2.

Mer generelt

hvis $r_1 = h + iv$ og $h > 0$ så

$h = 0$ så

$h < 0$ så