Første ordens differensligninger

"Diskret" versus kontinuert tid: kontinuert tid ofte mere bekvem matematisk - men svarer ikke altid til praktisk problemstilling.

Hvis vi eksempelvis vil modellere tilvækster er differentialkvotient ofte nyttig:

$$\frac{dy}{dt} = f(y(t)) \qquad (*)$$

Da $\frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$

Dvs $(*)$ god tilnærmelse til $\frac{\Delta y}{\Delta t} = f(y(t))$ hvis Δt lille - og vi kan drage fordel af redskaber fra f.eks. integralregning.

Men hvis vi ønsker at modellere Δy hvor Δt ikke lille - f.eks. Δt = kvartal, år el. lignende så er differentialligning ikke nødvendigvis god tilnærmelse.

Ser på udvikling y_0, y_1, y_2 over tid hvor $\Delta t = 1$ (f.eks. 1 måned, år, uge...)

$\Delta y_t = y_{t+1} - y_t$ tilvækst fra t til $t+1$

Ex $\quad \Delta y_t = 2 \Leftrightarrow y_{t+1} - y_t = 2 \Leftrightarrow y_{t+1} = y_t + 2$

$$\Delta y_t = -0.1\, y_t \Leftrightarrow y_{t+1} = y_t - 0.1\, y_t \Leftrightarrow \underbrace{y_{t+1} = 0.9\, y_t}_{\substack{\text{eksplicit formel} \\ \text{for udvikling} \\ y_t \to y_{t+1}.}}$$

Lineær første ordens differens ligning

$$y_{t+1} + a y_t = b \Leftrightarrow \underbrace{\overset{\text{"}\frac{dy}{dt}\text{"}}{\Delta y_{t+1}} + \overset{\text{"}a\text{"}}{(1+a)} y_t}_{\substack{\text{analog til lineær første ordens} \\ \text{differential ligning}}} = \overset{\text{"}b\text{"}}{c}$$

NB: holder os til simple tilfælde med konstante koefficienter da diskret tid matematisk mere besværlig end kontinuert tid.

Iterativ løsning

Ex: $\quad y_{t+1} - y_t = 2 \qquad y_0 = 15$

$$\begin{aligned} y_0 &= 15 \\ y_1 &= 15 + 2 \\ y_2 &= 15 + 2 + 2 \\ y_3 &= 15 + 2 + 2 + 2 \\ &\vdots \\ y_t &= 15 + 2t \end{aligned}$$

Ex $\quad y_{t+1} - 1.1\, y_t = 0 \iff y_{t+1} = 1.1 y_t \qquad y_0 = 1000$

$y_0 = 1000$

$y_1 = 1.1 \cdot 1000$

$y_2 = 1.1 \cdot 1.1 \cdot 1000$

$\vdots$

$y_t = 1000 \cdot 1.1^t$ (rentetilskrivning 10% pr. tidsenhed).

Generel løsning

$y = y_p + y_c$ (generel = partikulær + komplementær)

Partikulær løsning

Gæt $y = k$: $\quad k + ak = c \iff k(1+a) = c \iff$

$$k = \frac{c}{1+a}$$

- Forudsæt $1+a \neq 0$!

Hvis $1+a = 0 \iff a = -1$: gæt $y = kt$.

$$k(t+1) - kt = c \iff kt + k - kt = c$$

$$\iff k = c$$

Dvs $\quad y_p = \begin{cases} \frac{c}{1+a} & a \neq -1 \\ ct & a = -1 \end{cases}$

Løsning af homogene ligning

$$y_{t+1} + a y_t = 0 \iff y_{t+1} = -a y_t.$$

Gæt $y_t = A(-a)^t$: $y_{t+1} + a y_t = A(-a)^{t+1} + a A(-a)^t =$

$$A(-a)^{t+1} - A(-a)^{t+1} = 0 \checkmark$$

Den generel Løsning

$$y = y_p + y_c = \begin{cases} \frac{c}{1+a} + A(-a)^t & a \neq -1 \\ ct + A & a = -1. \end{cases}$$

Ex

$$\Delta y_t = 1 + 4 y_t \qquad y_0 = \frac{7}{4}.$$

$$\Delta y_t = 1 + 4 y_t \iff y_{t+1} - y_t = 1 + 4 y_t \iff y_{t+1} - 5 y_t = 1$$

$$y_p = \frac{1}{1+(-5)} = -\frac{1}{4}$$

$$y_c = A\,5^t$$

$$y_0 = \frac{7}{4} \iff A\,5^0 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \iff A = \frac{8}{4} = 2.$$

Dvs $y = -\frac{1}{4} + 2\,5^t.$

Dynamisk stabilitet (eller mangel på samme)

$b = -a \qquad (-a)^t = b^t$

b	b^t
>1	voksende
$=1$	konstant $=1$
$1 > b > 0$	aftagende fra en mod nul
$b = 0$	konstant $= 0$
$0 > b \geq -1$	shifter mellem + og ÷, numerisk værdi $\to 0$.
$b = -1$	shifter mellem -1 og 1 ($\approx$ cos / sin)
$b < -1$	shifter mellem pos og neg. værdier - numerisk værdi voksende

Markedsmodel

$$Q_{dt} = Q_{st} \qquad \delta, \beta > 0$$

$$Q_{dt} = \alpha - \beta P_t$$

$$Q_{st} = -\gamma + \delta P_{t-1}$$ (udbud afhænger af pris for foregående periode)

$$\alpha - \beta P_t = -\gamma + \delta P_{t-1} \iff -\beta P_t - \delta P_{t-1} = -\gamma - \alpha$$

$$\iff P_t + \frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma + \alpha}{\beta}$$

Løsning
$$P_t = A\left(-\frac{\delta}{\beta}\right)^t + \left(\frac{\gamma+\alpha}{\beta}\right) \Big/ \left(\frac{\delta}{\beta} + 1\right)$$

$$= A\left(-\frac{\delta}{\beta}\right)^t + \frac{\gamma+\alpha}{\delta+\beta}$$

$$= \left[P_0 - \frac{\gamma+\alpha}{\delta+\beta}\right]\left(-\frac{\delta}{\beta}\right)^t + \frac{\gamma+\alpha}{\delta+\beta}$$

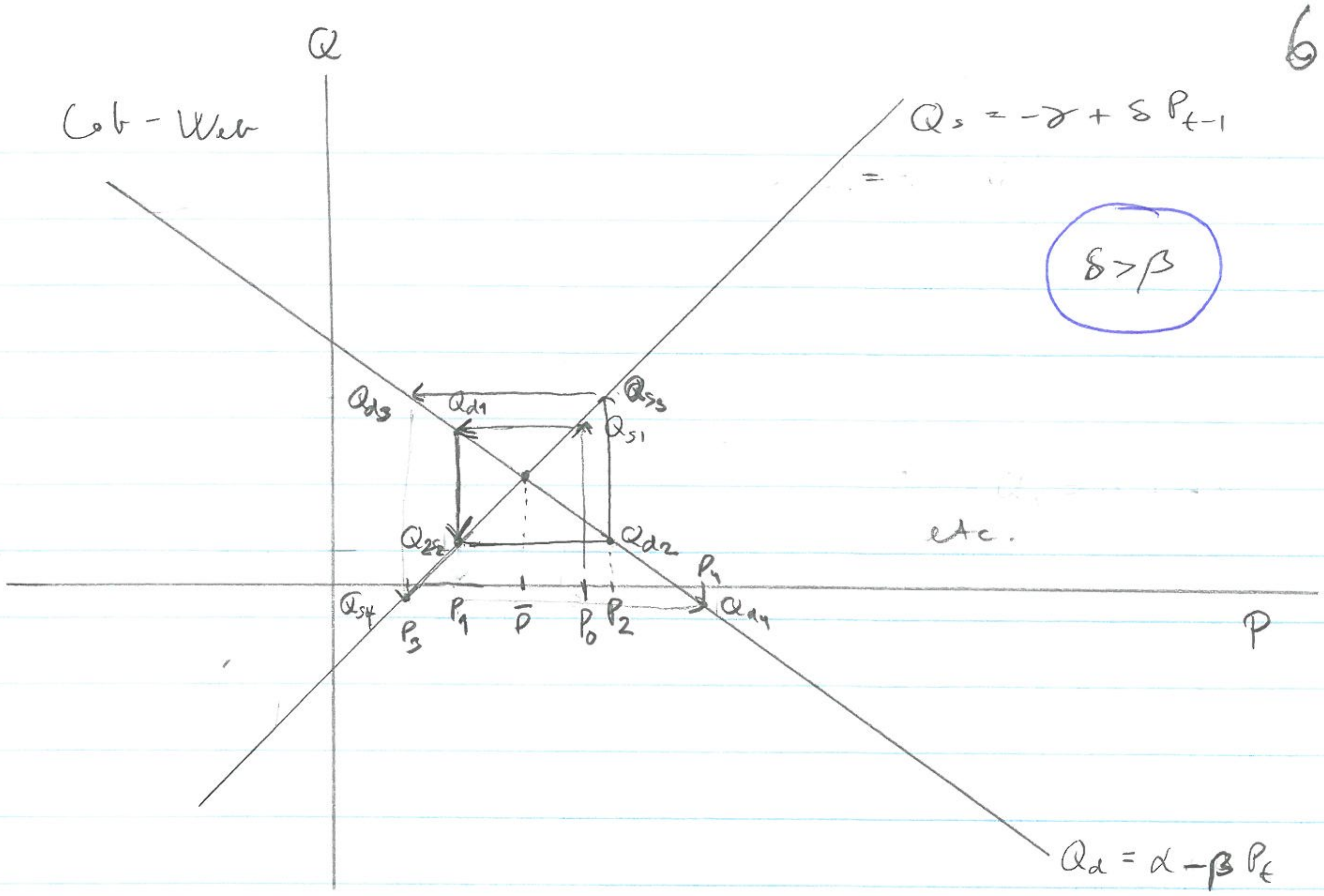
Dvs

$\frac{\delta}{\beta} = 1$: P_t konstant $= P_0$.

$1 > \frac{\delta}{\beta} > 0$: oscillerende, konvergens mod ligevægt $\bar{P} = \frac{\gamma+\alpha}{\delta+\beta}$

$\frac{\delta}{\beta} > 1$: pris oscillerende væk fra P_0.

$$Q_{dt} = Q_{st} = \alpha - \beta\left[P_0 - \frac{\gamma+\alpha}{\delta+\beta}\right]\left(-\frac{\delta}{\beta}\right)^t - \beta\,\frac{\gamma+\alpha}{\delta+\beta}.$$



$\delta > \beta = \frac{\delta}{\beta} > 1$ (ustabil situation) (spindelsvær væk fra ligevægt)

$P_0 \rightarrow Q_{s_1} = Q_{d_1} \longrightarrow P_1 \rightarrow Q_{s_2} = Q_{d_2} \rightarrow P_2$ .....

$\delta < \beta$: spindelsvær mod ligevægt.