Opsamling samt differensligninger med støj

October 29, 2014

Emner dækket i kursus

1. Integralregning
2. Lineære differentialligninger
   - førsteordens
   - andenordens (konstante koefficienter, herunder løsninger vha. komplekse tal)
3. Differensligninger
   - førsteordens (konstante koefficienter)
   - andenordens (konstante koefficienter)
4. Diverse anvendelser: Domar, markedsmodel med tidsdynamik for pris, Solow, Cob-web, Samuelson, News vendor (udregning af forventet fortjeneste vha. integralregning).

Integralregning

Ubestemt integrale

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + c$$

hvor $F'(x) = f(x)$ og c vilkårlig konstant.

'Omvendt' differentialregning.

Bestemt integrale

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A$$

hvor A areal af område mellem f's graf, x-aksen og linjerne $x = a$ og $x = b$.

Link mellem ubestemt og bestemt integrale:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Dvs.

- bestemt integrale kan udregnes vha. stamfunktion F.
- stamfunktion kan tilnærmes vha. approximativ arealberegning:

$$F(t) = \int_0^t f(x)\mathrm{d}x + F(0) \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i + y_0$$

hvor $y_0 = F(0)$ er begyndelsesbetingelsen - dvs. værdien til tid $t = 0$.

Integral regning og differentialligninger

Simpleste tilfælde:

$$f'(t) = h(t) \Leftrightarrow f(t) = \int h(t)\mathrm{d}t$$

Lineær førsteordens: (u, y, w funktioner af t)

$$y' + uy = w$$

har løsning:

$$y = \exp(-U(t))\left[A + \int w(t)\exp(U(t))\mathrm{d}t\right]$$

hvor A er en vilkårlig konstant og $U(t)$ er en stamfunktion til $u(t)$.

Eksempel

$$y' + 3t^2 y = \exp(t)$$

Dvs. $u(t) = 3t^2$ og $U(t) = t^3$. Dermed

$$y(t) = \exp(-t^3)A + \exp(-t^3)\int \exp(t)\exp(t^3)\mathrm{d}t =$$
$$\exp(-t^3)A + \exp(-t^3)F(t)$$

hvor $F(t)$ er stamfunktion til $\exp(t)\exp(t^3) = \exp(t + t^3)$. Ikke noget eksplicit udtryk for F men vi kan antage $F(0) = 0$ uden tab af generalitet.

Dvs. med begyndelsesbetingelse $y(0) = 2$ fås

$$A = 2 \Rightarrow y(t) = 2\exp(-t^3) + \exp(t^3)F(t)$$

Vi kan approximere $F(t)$ vha. numerisk integration af funktionen $\exp(t + t^3)$.

Vha. numerisk integration

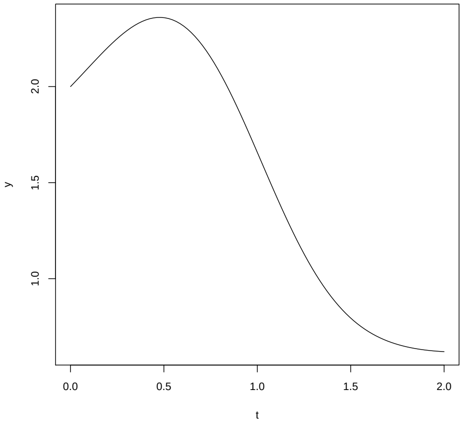
```
f=function(t){exp(t+t^3)}

t=seq(0,2,len=100)

F=rep(0,100)
for (i in 1:100)
  F[i]=integrate(f,0,t[i])$value

y=2*exp(-t^3)+exp(-t^3)*F
```

Plot af løsning $y(t)$:



Differensligninger

Diskret analog til differentialligning:

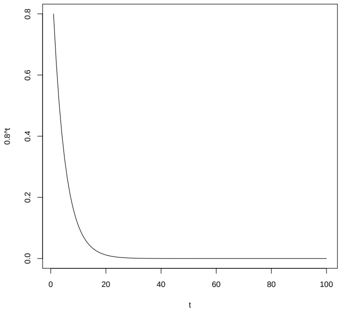
$$\Delta y_t + a y_t = c$$

($\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ erstattet af tilvækst $\Delta y_t = y_{t+1} - y_t$)

Eksempel:

$$\Delta y_t + 0.2 y_t = 0 \Leftrightarrow y_{t+1} - y_t + 0.2 y_t = 0 \Leftrightarrow y_{t+1} = 0.8 y_t$$

Løsning med startbetingelse $y(0) = 1$ er $y_t = 0.8^t$:

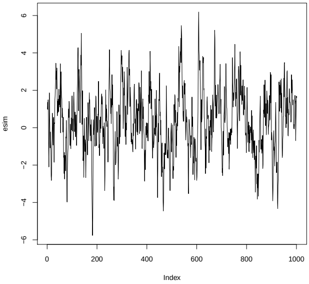


Hvad hvis differensligning ikke passer eksakt ? Dvs.

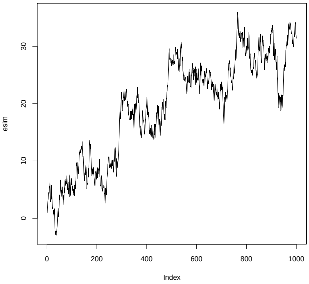
$$y_{t+1} = \phi y_t + e_t$$

hvor e_t tilfældigt fejlled ?

$\phi = 0.8$



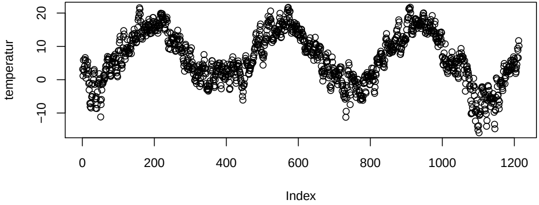
$\phi = 1$

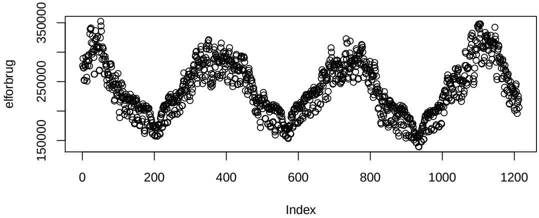


Eksempel på såkaldt auto-regressiv model (økonometri)

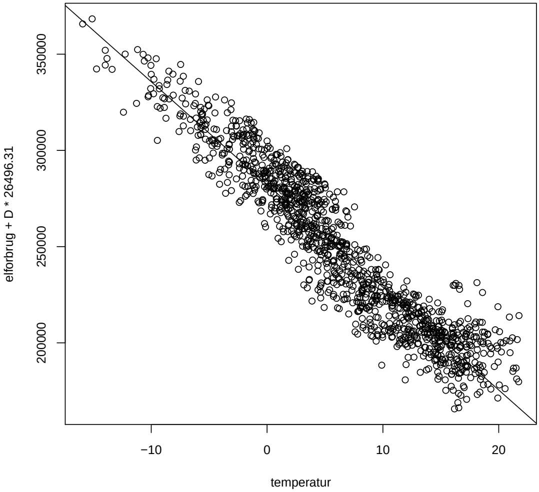
Elforbrug og temperatur i Sverige

Temperatur og Elforbrug:





Elforbrug mod temperatur:



Model

$$F_t = a + bT_t + y_t$$

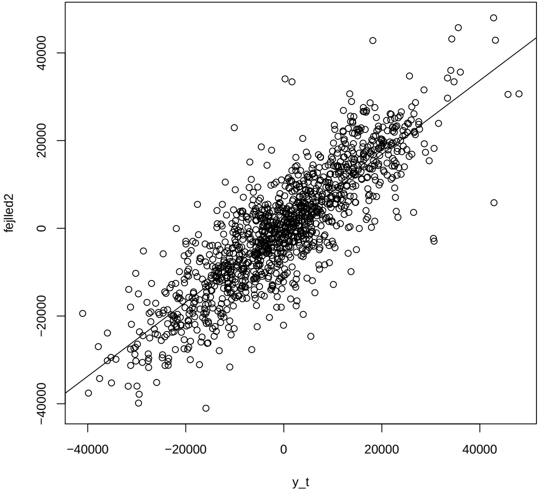
hvor y_t fejlled.

Koefficienter a og b kan findes ved hjælp af mindste kvadraters metode, dvs. a og b minimerer

$$\sum_t (F_t - a - bT_t)^2$$

$a = 282289$ $b = -5338$

Plot af (y_t, y_{t+1}):



Model for y_t

$$y_t = \phi y_{t-1} + e_t$$

hvor e_t tilfældigt fejlled.

Vha. mindste kvadraters metode: $\phi = 0.8483$.

Anvendelse af model: forecast af elforbrug F_{t+1} i morgen $(t+1)$ givet informationer i dag (t).

Antag afvigelse i dag y_t og temperatur forecast for i morgen $\hat{T}_{t+1}$.

Dermed forecast af fejl og forbrug:

$$\hat{y}_{t+1} = \phi y_t \quad \hat{F}_{t+1} = a + b\hat{T}_{t+1} + \hat{y}_{t+1}$$

Samuelsons model med støj

$$Y_t = C_t + I_t + G_0 + \epsilon_t$$

hvor

$$C_t = \gamma Y_{t-1} + \eta_t \quad I_t = \alpha(C_t - C_{t-1}) + \delta_t$$

Her er ϵ_t, η_t og δ_t "støjled" som modellerer at f.eks. C_t udover afhængigheden af Y_{t-1} også afhænger af nogle tilfældige faktorer.

Modellen kan stadig have en ligevægtstilstand, som dog nu er stokastisk fluktuerende omkring $2G_0$.