Rettevejledning 3

I) $$p\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\min(x,q)\,dx - cq = p\int_{-\infty}^{q} f(x)x\,dx + p\int_{q}^{\infty} q f(x)\,dx - cq$$

Bruger reglen $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^c g(x)\,dx + \int_c^b g(x)\,dx$, $a < c < b$ med $c = q$. Til venstre for q er $f(x)\min(x,q) = f(x)x$ og til højre er $f(x)\min(x,q) = f(x)q$.

II) $$p\int_{-\infty}^{q} f(x)x\,dx + p\int_{q}^{\infty} q f(x)\,dx - cq = p\int_{-\infty}^{q} f(x)x\,dx + pq(1-F(q)) - cq$$

I andet integrale sættes konstanten q udenfor integralet. Dernæst benyttes $1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{q} f(x)\,dx + \int_{q}^{\infty} f(x)\,dx$ samt $F(q) = \int_{-\infty}^{q} f(x)\,dx$. Kombineres disse tre resultater fås $pq\int_{q}^{\infty} f(x)\,dx = pq\left(1 - \int_{-\infty}^{q} f(x)\,dx\right) = pq(1-F(q))$.

III) $$\frac{dEX}{dq} = p - c - pF(q)$$

$$\frac{dEX}{dq} = \frac{d}{dq}p\int_{-\infty}^{q} f(x)x\,dx + \frac{d}{dq}pq(1-F(q)) - \frac{d}{dq}cq$$

Mht. første led har vi for en vilkårlig funktion $g(x)$, at $\int_{-\infty}^{z} g(x)\,dx = G(z) - G(-\infty)$. Dermed $\frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{z} g(x)\,dx = \frac{d}{dz}G(z) = g(z)$.

Vi bruger dette resultat med $g(x) = f(x)x$ og $z = q$.

Dermed fås $\frac{d}{dq} p\int_{-\infty}^{q} f(x)x\,dx = p\,f(q)\,q$

Endvidere, pr. produktregel fås $\frac{d}{dq} pq(1-F(q)) = p(1-F(q)) + pq(-f(q))$.

Dvs.

$$\frac{d\mathbb{E}X}{dq} = p\,f(q)\,q + p - pF(q) - pq\,f(q) - c = p - c - pF(q)$$

$\square$.