Retteveјledning 5

Udledning af logistisk vækstkurve jvf slide

" $\Leftrightarrow$ " Forklaring

---

1. ganger på begge sider med dt og dividerer begge sider med $k\left(1-\frac{y}{A}\right)y$.

2. Tager ubestemt integrale på begge sider.

3. Ganger med k på begge sider.

4. Benytter, at $\frac{1}{y}+\frac{\frac{1}{A}}{\left(1-\frac{y}{A}\right)}=\frac{\left(1-\frac{y}{A}\right)}{y\left(1-\frac{y}{A}\right)}+\frac{\frac{y}{A}}{y\left(1-\frac{y}{A}\right)}$

$$=\frac{1-\frac{y}{A}+\frac{y}{A}}{y\left(1-\frac{y}{A}\right)}=\frac{1}{y\left(1-\frac{y}{A}\right)}$$

(dvs addition af brøker vha. fællesnævner)

5. Benytter 1) at "integrale af sum = sum af integrale" samt 2) stamfkt til $\frac{1}{y}$ er $\ln y$ og stamfkt til $\frac{-\frac{1}{A}}{1-\frac{y}{A}}$ er $\ln\left(1-\frac{y}{A}\right)$.

6. Benytter $\ln u-\ln v=\ln\frac{u}{v}$

7. Tager $\exp(\cdot)$ på begge sider. $B=\exp(c)$.

8. Ganger med $1-\frac{y}{A}$ på begge sider.

9. Adderer $\frac{B}{A} y \exp(kt)$ på begge sider, sætter y udenfor parantes på venstresiden og dividerer med indholdet af parantesen $(1 + \frac{B}{A}\exp(kt))$ på begge sider.

10: Ganger tæller og nævner på højresiden med $\frac{A}{B}\exp(-kt)$.

15.5.4

Ligning: $\dfrac{dy}{dt} = 3y^2 t$

Løser vha. "separable variables":

$$\frac{dy}{dt} = 3y^2 t \iff dy = 3y^2 t\, dt \iff \frac{1}{3} y^{-2} dy = t\, dt$$

$$\iff \frac{1}{3}\int y^{-2}\, dy = \int t\, dt \iff \frac{1}{3} \cdot -y^{-1} = \frac{1}{2}t^2 + c$$

$(B = -3c)$

$$\iff y^{-1} = -3\,\frac{1}{2}t^2 + B \iff y = \underline{\underline{\frac{1}{B - \frac{3}{2}t^2}}}.$$

Løser vha. metode for Bernoulli ligning:

$\dfrac{dy}{dt} = 3y^2 t$ er på formen $\dfrac{dy}{dt} + Ry = Wy^m$

med $R(t) = 0$, $W = 3t$ og $m = 2$.

Dvs for $z(t) = y(t)^{1-2} = \dfrac{1}{y(t)}$ fås idet

$(1-m) = (1-2) = -1$ og $-\int R(t)\, dt = -k$,

$$z(t) = A\exp(+k) + \exp(k)\int (-1)\cdot 3t \cdot \exp(-k)\, dt$$

$$\overset{(B = A\exp(k))}{=} B + \exp(k)(-3)\exp(-k)\,\frac{1}{2}t^2 = B - \frac{3}{2}t^2.$$

Endeligt fås

$$y(t) = z(t)^{-1} = \underline{\underline{\frac{1}{B - \frac{3}{2}t^2}}}.$$