Opgaver 7

Opgave 7.1

Antag, at vi har målt størrelsen μ to gange, og dermed observeret to uafhængige stokastiske variable X_1 og X_2, hvor vi antager, at nøjagtigheden på den første måling er bedre end nøjagtigheden på den anden måling.

Dvs. $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2) = \mu$ og $\mathbb{V}(X_1) = \sigma_1^2 < \mathbb{V}(X_2) = \sigma_2^2$.

Lad $0 < \alpha < 1$.

a) Vis, at $\alpha X_1 + (1-\alpha)X_2$ er en central estimator for μ, dvs. $\mathbb{E}(\alpha X_1 + (1-\alpha)X_2) = \mu$.

b) Vis, at $\mathbb{V}(\alpha X_1 + (1-\alpha)X_2) = \alpha^2\sigma_1^2 + (1-\alpha)^2\sigma_2^2$, samt at denne varians er mindst, når $\alpha = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$. Hint: Vi er på jagt efter bundpunktet for parablen beskrevet af α.

c) Antag $x_1 = 10$, $x_2 = 14$, $\sigma_1^2 = 4$ og $\sigma_2^2 = 8$. Hvilket estimat vil du angive for μ?

Opgave 7.2

Den samme højdeforskel er geometrisk nivelleret over tre forskellige strækninger med følgende resultater:

Strækning	Vejlængde	Højdeforskel
1	1,142 km	9751 mm
2	1,583 km	9759 mm
3	1,765 km	9753 mm

Nivellementets kilometerspredning er opgivet til $\sigma_k = 5,1$ mm/$\sqrt{\text{km}}$.

a) Bestem vægte til observationerne og beregn det vægtede gennemsnit $\bar{x}^*$.

b) Vis, at spredningen på det vægtede gennemsnit er givet ved $\sigma = 3,54$ mm.

c) Antag $\bar{X}^*$ er normalfordelt, hvoraf

$$P(-1,96 < \frac{\bar{X}^* - \mu}{\sigma} < 1,96) = 0,95$$

Fastlæg hermed et 95% konfidensinterval for μ.
Fra KMS opgives højdeforskellen til 9,75 m. Hvordan harmonerer det med vores observationer.

Med venlig hilsen
Torben