Landmålingens fejlteori
Repetition - Sandsynlighedsregning
Lektion 2

Torben Tvedebrink - tvede@math.aau.dk
http://www.math.aau.dk/∼tvede/teaching/L4

Institut for Matematiske Fag
Aalborg Universitet

28. april 2009

Terminologi

Gentag et forsøg n gange.

U	:	**udfaldsrum**, mængden af mulige udfald.
$u \in U$	:	et **udfald**.
A	:	en **hændelse**, delmængde af U, $A \subseteq U$. Hændelsen A indtræffer, hvis $u \in A$. Bemærk $\emptyset$ og U er hændelser.
n_A	:	antal gange A indtræffer.
$\frac{n_A}{n}$	:	**relativ hyppighed** for A.
$P(A)$	:	**sandsynlighed** for A.

Når n er stor, gælder der

$$P(A) \approx \frac{n_A}{n}. \tag{1}$$

De relative hyppigheder går mod $P(A)$, når n vokser.

Bemærk, de relative hyppigheder er beregnet fra data, dvs. de er **observeret værdier**.

Hændelser

Lad A og B være to hændelser, da betegner

$A \cap B$: hændelsen **både** A og B indtræffer,

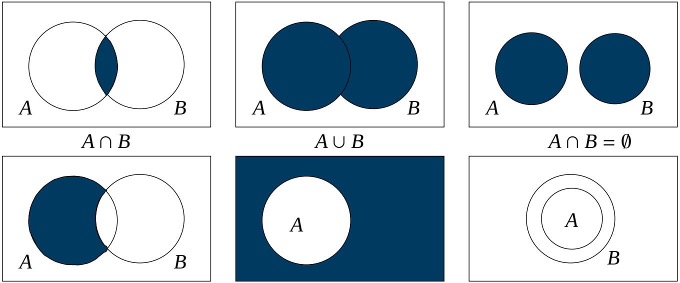
$A \cup B$: hændelsen **enten** A, **eller** B (incl. **både og**) indtræffer,

$A \setminus B$: hændelsen A, **men ikke** B, indtræffer,

$\complement A = U \setminus A$: hændelsen A indtræffer **ikke**, A **komplementær**.

Hvis $A \cap B = \emptyset$, så siges A og B at være **uforenlige**.

Hvis $A \subseteq B$, dvs. $A \cap B = A$, siges A at **medføre** B.



$A \setminus B$ $\complement A$ A medfører B

Sandsynlighedsfordeling

Definition 1

Lad U være udfaldsrummet for et forsøg. En funktion P, som til hver hændelse $A \subseteq U$ tilordner et reelt tal $P(A)$, således at

1. $0 \leq P(A) \leq 1$,
2. $P(U) = 1$,
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, hvis $A \cap B = \emptyset$,

kaldes en **sandsynlighedsfordeling**.

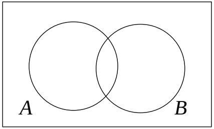
$P(A)$ kaldes **sandsynligheden** for hændelsen A.

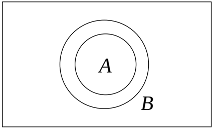
Sandsynlighedsfordeling

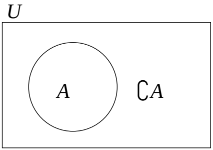
Sætning 1

Lad A og B være to hændelser. Da gælder:

4. $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$
5. $P(A) \leq P(B)$, hvis $A \subseteq B$
6. $P(\complement A) = 1 - P(A)$
7. $P(\emptyset) = 0$
8. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$







Kombinatorik

Sætning 5

Antal mulige måder/kombinationer at udtage k elementer fra en mængde med n elementer:

	uden tilbagelægning	med tilbagelægning
ordnet	$(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$	n^k
uordnet	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	-

Betingede sandsynligheder

Et forsøg udføres n gange og har to hændelser A og B. Hændelserne A, B og $A \cap B$ indtræffer hhv. n_A, n_B og $n_{A\cap B}$ gange ud af n mulige.

Den relative hyppighed for A blandt de forsøg hvor B indtræffer er $\frac{n_{A\cap B}}{n_B}$.

Udtrykkes dette som sandsynligheder:

$$\frac{n_{A\cap B}}{n_B} = \frac{n_{A\cap B}/n}{n_B/n} \approx \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Definition 2

Lad A og B være to hændelser, hvor $P(B) > 0$.
Den betingede sandsynlighed for A givet B er

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

"$A|B$" læses som "A givet B" eller "A betinget med B".

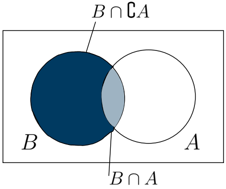
Bayes' formel

Betingede usandsynligheder er defineret ved $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.
Forlænges brøken har vi:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \underbrace{\frac{P(A)}{P(A)}}_{=1} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}.$$

Ydermere gælder der for alle hændelser B:

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\complement A)P(\complement A).$$



Uafhængige hændelser

Definition 3
To hændelser A og B siges at være **uafhængige**, hvis

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Sætning 6
Lad A og B være to hændelser, hvor $P(A) > 0$ og $P(B) > 0$.
Flg. udsagn ækvivalente.

- A og B er uafhængige,
- $P(A|B) = P(A)$,
- $P(B|A) = P(B)$.

Opgaver

Opgaver fra sidste gang (Løsningsforslag på kursushjemmesiden asap):
Rudemo: Øvelse 1.3 (a-d), 1.16, 1.24 (a) samt udregn sandsynligheden for n=23, 1.27.
Opgaveark 1: Opgave 1.1, 1.2, 1.3

Nye opgaver:
Rudemo: Øvelse 1.15, 1.14, 1.20, 1.21, 1.22, 1.17.