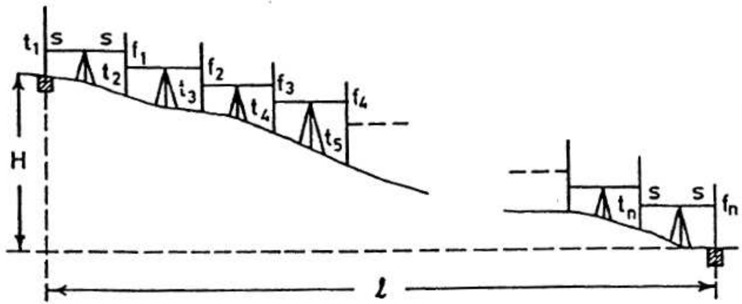
Landmålingens fejlteori
Repetition
Fejlforplantning ved geometrisk nivellement
Lektion 7

Torben Tvedebrink - tvede@math.aau.dk
http://www.math.aau.dk/∼tvede/teaching/L4

Institut for Matematiske Fag
Aalborg Universitet

12. maj 2009

Geometrisk nivellement



t_i : stadieaflæsning ved tilbagesigte
f_i : stadieaflæsning ved fremsigte

$$h = (t_1 - f_1) + (t_2 - f_2) + \cdots + (t_n - f_n) = \sum_{i=1}^{n} t_i - f_i$$

Totallængden ℓ er opdelt i $2n$ stykker af længde s, dvs. $\ell = 2ns$.

Modellen

Realisationer af stokastiske variable,

$$\begin{array}{ccccc} T_i & F_i & & & H \\ \downarrow & \downarrow & & & \downarrow \\ t_i & f_i & & & h \end{array}$$

Vi antager $\mathbb{V}(T_i) = \mathbb{V}(F_i) = \sigma_a^2$, $i = 1, \ldots, n$. Denne antagelse kan begrundes med sigteafstanden er fast og den samme for alle observationer.
h er en realisation af den stokastiske variabel $H = \sum_{i=1}^{n} (T_i - F_i)$.

Modellen

Realisationer af stokastiske variable,

$$\begin{array}{ccc} T_i & F_i & H \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ t_i & f_i & h \end{array}$$

Vi antager $\mathbb{V}(T_i) = \mathbb{V}(F_i) = \sigma_a^2$, $i = 1, \ldots, n$. Denne antagelse kan begrundes med sigteafstanden er fast og den samme for alle observationer.

h er en realisation af den stokastiske variabel $H = \sum_{i=1}^{n} (T_i - F_i)$.

Variansen af H bestemmes ved

$$\mathbb{V}(H) = \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} T_i - F_i\right) = \sum_{i=1}^{n} [\mathbb{V}(T_i) + \mathbb{V}(F_i)] = 2n\sigma_a^2$$

Fra forrige slide

$$\ell = 2ns \quad \Leftrightarrow \quad 2n = \frac{\ell}{s}.$$

Modellen

Realisationer af stokastiske variable,

$$\begin{array}{ccccc} T_i & F_i & & & H \\ \downarrow & \downarrow & & & \downarrow \\ t_i & f_i & & & h \end{array}$$

Vi antager $\mathbb{V}(T_i) = \mathbb{V}(F_i) = \sigma_a^2$, $i = 1, \ldots, n$. Denne antagelse kan begrundes med sigteafstanden er fast og den samme for alle observationer.
h er en realisation af den stokastiske variabel $H = \sum_{i=1}^{n}(T_i - F_i)$.

Variansen af H bestemmes ved

$$\mathbb{V}(H) = \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} T_i - F_i\right) = \sum_{i=1}^{n} [\mathbb{V}(T_i) + \mathbb{V}(F_i)] = 2n\sigma_a^2 = \ell\frac{\sigma_a^2}{s} = \sigma_\ell^2$$

Fra forrige slide

$$\ell = 2ns \quad \Leftrightarrow \quad 2n = \frac{\ell}{s}.$$

Kilometerspredningen σ_k

Variansen på højdeforskellen over længden ℓ,

$$\mathbb{V}(H) = \ell \frac{\sigma_a^2}{s} = \sigma_\ell^2$$

Erfaringer viser at $\frac{\sigma_a}{\sqrt{s}}$ kun i ringe grad afhænger af s når $s < 100$ m.

Således indføres kilometerspredningen $\sigma_k = \sigma_a / \sqrt{s}$ $\left[\frac{\text{mm}}{\sqrt{\text{km}}}\right]$ hvor af

$$\sigma_\ell = \sigma_k \sqrt{\ell}.$$

σ_ℓ er således spredningen på et geometrisk nivellement over længden ℓ.

Vægtrelationen

Som tidligere er $x_1, \ldots, x_n$ realisationer af stokatiske variable $X_1, \ldots, X_n$, hvor $\mathbb{E}(X_i) = \mu_i$ og $\mathbb{V}(X_i) = \sigma_i^2$ ikke nødvendigvis er ens.

Hver måling gives en vægt p_i som afspejler kvaliteten af målingen - desto højere vægt desto bedre måling.

Vægtene er positive tal der vælges således de opfylder vægtrelationen, dvs

$$p_1\sigma_1^2 = p_2\sigma_2^3 = \cdots = p_n\sigma_n^2.$$

Eks. hvis to variansen på første måling er dobbelt så stor på som den anden ($\sigma_1^2 = 2\sigma_2^2$), vælges $p_1 = 1$ og $p_2 = 2$ sådan at $p_1\sigma_1^2 = p_2\sigma_2^2$.

Observationer af varierende kvalitet

Antag at $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_n = \mu$, dvs alle observationer $x_1, \ldots, x_n$ er målinger af samme størrelse μ.

Variansen ikke nødvendigvis den samme for alle målinger. Eksempler på hvor dette kan indtræffe:

- Der kan være anvendt måleinstrumenter af forskellige fabrikanter og/eller kvalitet. Dvs at vinkelspredningen er forskellig for de anvendte instrumenter,

$$\sigma_{v,1} = 8 \text{ mgon og } \sigma_{v,2} = 20 \text{ mgon.}$$

Observationer af varierende kvalitet

Antag at $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_n = \mu$, dvs alle observationer $x_1, \ldots, x_n$ er målinger af samme størrelse μ.

Variansen ikke nødvendigvis den samme for alle målinger. Eksempler på hvor dette kan indtræffe:

- Der kan være anvendt måleinstrumenter af forskellige fabrikanter og/eller kvalitet. Dvs at vinkelspredningen er forskellig for de anvendte instrumenter,

$$\sigma_{v,1} = 8 \text{ mgon og } \sigma_{v,2} = 20 \text{ mgon.}$$

- Det kan benyttes flere fikspunkter til bestemmelse af koten i et punkt P med forskellige afstande til P. Fx.

$$\sigma_1 = \sqrt{\ell_1}\sigma_k \left[\frac{\text{mm}}{\sqrt{\text{km}}}\right], \sigma_2 = \sqrt{\ell_2}\sigma_k \left[\frac{\text{mm}}{\sqrt{\text{km}}}\right] \text{ og } \sigma_3 = \sqrt{\ell_3}\sigma_k \left[\frac{\text{mm}}{\sqrt{\text{km}}}\right]$$

Vægtet gennemsnit

Til at estimere μ bruges det vægtede gennemsnit $\bar{x}^*$ således mere præcise målinger (observationer med lav varians) vægter mere i gennemsnittet end dårligere bestemte målinger (målinger med højere varians).

$$\bar{x}^* = \frac{p_1}{p_+}x_1 + \cdots + \frac{p_n}{p_+}x_n = \frac{1}{p_+}(p_1x_1 + \cdots + p_nx_n),$$

hvor vægtene er valgt så de opfylder vægtrelationen $p_1\sigma_1^2 = \cdots = p_n\sigma_n^2$, og $p_+ = \sum_{1=i}^n p_i$.

Vægtet gennemsnit

Til at estimere μ bruges det vægtede gennemsnit $\bar{x}^*$ således mere præcise målinger (observationer med lav varians) vægter mere i gennemsnittet end dårligere bestemte målinger (målinger med højere varians).

$$\bar{x}^* = \frac{p_1}{p_+}x_1 + \cdots + \frac{p_n}{p_+}x_n = \frac{1}{p_+}(p_1x_1 + \cdots + p_nx_n),$$

hvor vægtene er valgt så de opfylder vægtrelationen $p_1\sigma_1^2 = \cdots = p_n\sigma_n^2$, og $p_+ = \sum_{1=i}^{n} p_i$.

Dvs

$$\frac{p_1}{p_+} + \frac{p_2}{p_+} + \cdots + \frac{p_n}{p_+} = \frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}{p_+} = 1.$$

Bemærk: $p_+ = \sum_{i=1}^{n} p_i \neq 1$ som jeg fejlagtigt påstod i tirsdags..

Sætning

For den stokastiske variabel

$$\bar{X}^* = \frac{p_1}{p_+} X_1 + \cdots + \frac{p_n}{p_+} X_n = \frac{1}{p_+}(p_1 X_1 + \cdots + p_n X_n), \quad \text{hvor } p_+ = \sum_{1=i}^{n} p_i$$

gælder følgende udsagn

1. $\bar{X}^*$ er et centralt estimat, dvs. $\mathbb{E}(\bar{X}^*) = \mu$
2. For positive $p_1, \ldots, p_n$ er $\mathbb{V}(\bar{X}^*)$ mindst når vægtene opfylder $p_1 \sigma_1^2 = \cdots = p_n \sigma_n^2$.

Bevis: Opgave 7.1 i dagens opgaveregning.

Estimator af σ_0^2

Idet vægtrelationen foreskriver $p_i\sigma_i^2$ er ens for alle i, kan σ_0^2 indføres som

$$\sigma_0^2 = p_1\sigma_1^2 = \cdots = p_2\sigma_2^2.$$

Som estimator for σ_0^2 anvendes

$$S_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^n p_i(X_i - \bar{X}^*)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i X_i^2 - (\bar{X}^*)^2 p_+}{n-1}.$$

Estimator af σ_0^2

Idet vægtrelationen foreskriver $p_i\sigma_i^2$ er ens for alle i, kan σ_0^2 indføres som

$$\sigma_0^2 = p_1\sigma_1^2 = \cdots = p_2\sigma_2^2.$$

Som estimator for σ_0^2 anvendes

$$S_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^n p_i(X_i - \bar{X}^*)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i X_i^2 - (\bar{X}^*)^2 p_+}{n-1}.$$

Som estimat af S_0^2 anvendes s_0^2, hvor de stokatiske variable er erstattet af de observerede værdier,

$$s_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^n p_i(x_i - \bar{x}^*)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - (\bar{x}^*)^2 p_+}{n-1}.$$

Fordelingen $\bar{X}^*$

Bemærk

$$\mathbb{V}(\bar{X}^*) = \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{p_+} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}\left(\frac{p_i}{p_+} X_i\right)$$

Fordelingen $\bar{X}^*$

Bemærk

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(\bar{X}^*) &= \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{p_+}X_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}\left(\frac{p_i}{p_+}X_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{p_i}{p_+}\right)^2\sigma_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{p_i p_i \sigma_i^2}{(p_+)^2}\end{aligned}$$

Fordelingen $\bar{X}^*$

Bemærk

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(\bar{X}^*) &= \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{p_+}X_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}\left(\frac{p_i}{p_+}X_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{p_i}{p_+}\right)^2\sigma_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{p_i p_i \sigma_i^2}{(p_+)^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{p_i \sigma_0^2}{(p_+)^2}
\end{aligned}$$

Fordelingen $\bar{X}^*$

Bemærk

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(\bar{X}^*) &= \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{p_+} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}\left(\frac{p_i}{p_+} X_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{p_i}{p_+}\right)^2 \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i p_i \sigma_i^2}{(p_+)^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i \sigma_0^2}{(p_+)^2} \\
&= \sigma_0^2 \frac{p_+}{(p_+)^2} = \frac{\sigma_0^2}{p_+}.
\end{aligned}$$

Således er variansen på det vægtede gennemsnit givet ved

$$\mathbb{V}(\bar{X}^*) = \frac{\sigma_0^2}{p_+} \quad \text{og dermed} \quad \bar{X}^* \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma_0^2}{p_+}\right)$$

Estimat af varians på $\bar{X}^*$ og X_i

Estimatet for σ_0^2 var givet ved s_0^2,

$$s_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^n p_i (x_i - \bar{x}^*)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - (\bar{x}^*)^2 p_+}{n-1}.$$

Estimatet for variansen af det vægtede gennemsnit er således

$$\mathbb{V}(\bar{X}^*) = \frac{\sigma_0^2}{p_+} \approx \frac{s_0^2}{p_+}.$$

Estimat af varians på $\bar{X}^*$ og X_i

Estimatet for σ_0^2 var givet ved s_0^2,

$$s_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^n p_i(x_i - \bar{x}^*)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - (\bar{x}^*)^2 p_+}{n-1}.$$

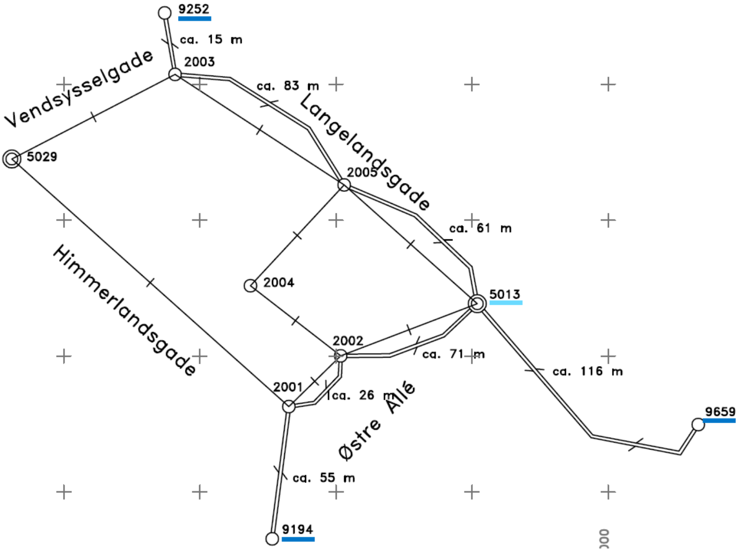
Estimatet for variansen af det vægtede gennemsnit er således

$$\mathbb{V}(\bar{X}^*) = \frac{\sigma_0^2}{p_+} \approx \frac{s_0^2}{p_+}.$$

Fra vægtrelationen gælder $\sigma_0^2 = p_1\sigma_1^2 = \cdots = p_n\sigma_n^2$. Dvs $\sigma_i = \frac{\sigma_0^2}{p_i}$.

$$\mathbb{V}(X_i) = \sigma_i^2 = \frac{\sigma_0^2}{p_i} \approx \frac{s_0^2}{p_i}.$$

Eksempel - Geometrisk nivellement



Eksempel - Geometrisk nivellement

Højdeforskel nivelleret over n strækninger med *samme* kilometerspredning σ_k. Variansen over en længde ℓ er fra tidligere givet ved $\sigma_k^2 \ell$.

Højdeforskel h	Længde ℓ	Varians på h over ℓ
h_1	ℓ_1	$\sigma_1^2 = \sigma_k^2 \ell_1$
h_2	ℓ_2	$\sigma_2^2 = \sigma_k^2 \ell_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
h_n	ℓ_n	$\sigma_n^2 = \sigma_k^2 \ell_n$

Forskellig varians på målinger, dvs. vægtede observationer.

Vægtrelationen er opfyldt når

$$\sigma_0^2 = p_1 \sigma_1^2 = \cdots = p_n \sigma_n^2.$$

Fra tabellen ses det at vægten kan vælges til $p_i = (\ell_i)^{-1}$ dvs vægten er den resiprokke længde.

Eksempel - Geometrisk nivellement

Vi observerer følgende:

Strækning	Højdeforskel [m]	Afstand [km]
9194 - 2001 - 2002 - 5013	4.141	0.14
9252 - 2003 - 2005 - 5013	4.138	0.18
9659 - 5013	4.140	0.12

Estimatet af koten μ i punktet 5013 er derfor givet ved:

$$
\begin{aligned}
\bar{x}^* &= \frac{\ell_1^{-1}}{\ell_1^{-1}+\ell_2^{-1}+\ell_3^{-1}}x_1 + \frac{\ell_2^{-1}}{\ell_1^{-1}+\ell_2^{-1}+\ell_3^{-1}}x_2 + \frac{\ell_3^{-1}}{\ell_1^{-1}+\ell_2^{-1}+\ell_3^{-1}}x_3 \\
&= \frac{\frac{1}{0.14}}{\frac{1}{0.14}+\frac{1}{0.18}+\frac{1}{0.12}}4.140 + \frac{\frac{1}{0.18}}{\frac{1}{0.14}+\frac{1}{0.18}+\frac{1}{0.12}}4.138 + \frac{\frac{1}{0.12}}{\frac{1}{0.14}+\frac{1}{0.18}+\frac{1}{0.12}}4.140 \\
&= 4.1398[\mathrm{m}]
\end{aligned}
$$

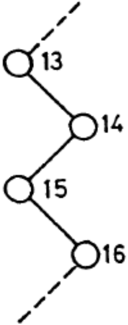
Eksempel - polygonvinkler

Vi måler vinklerne i punkterne 13-16.

Alle vinkler er målt med samme varians σ_v^2.

Lad $\sigma_{m,i}^2$ være variansen af middelsatsen i punkt i.

Punkt	Antal satser	$\sigma_{m,i}^2$
13	2	$\sigma_{m,13}^2 = \frac{\sigma_v^2}{2}$
14	3	$\sigma_{m,14}^2 = \frac{\sigma_v^2}{3}$
15	4	$\sigma_{m,15}^2 = \frac{\sigma_v^2}{4}$
16	6	$\sigma_{m,16}^2 = \frac{\sigma_v^2}{6}$



Eksempel - fortsat

Ifølge vægtrelationen skal $p_i\sigma_{m,i}^2$ være ens for alle i,

$$p_{13}\sigma_{m,13}^2 = p_{14}\sigma_{m,14}^2 = p_{15}\sigma_{m,15}^2 = p_{16}\sigma_{m,16}^2.$$

Jf. udtrykkene fra forrige slide

$$p_{13}\frac{\sigma_v^2}{2} = p_{14}\frac{\sigma_v^2}{3} = p_{15}\frac{\sigma_v^2}{4} = p_{16}\frac{\sigma_v^2}{6}.$$

Således kan vægtene vælges lig antal satser for hvert punkt.

Eksempel - Vinkelmålinger

Vinkler målt med forskellige satser med samme vinkelspredning σ_v.
Variansen på vinkler målt med k satser er fra tidligere givet ved σ_v^2/k.

Vinkel v	Sats k	Varians på middelsats
v_1	k_1	$\sigma_1^2 = \sigma_k^2/k_1$
v_2	k_2	$\sigma_2^2 = \sigma_k^2/k_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
v_n	k_n	$\sigma_k^2 = \sigma_k^2/k_n$

Forskellig varians på målinger, dvs. vægtede observationer.

Vægtrelationen er opfyldt når

$$\sigma_0^2 = p_1\sigma_1^2 = \cdots = p_n\sigma_n^2.$$

Fra tabellen ses det at vægten kan vælges til $p_i = k_i$ dvs vægten er antal satser.