Landmålingens fejlteori
Repetition - Fejlforplantning
Lektion 9

Torben Tvedebrink - tvede@math.aau.dk
http://www.math.aau.dk/∼tvede/teaching/L4

Institut for Matematiske Fag
Aalborg Universitet

18. maj 2009

Fejlforplantning

Landmåling involverer ofte bestemmelse af størrelser som ikke kan måles direkte, men kan beregnes ud fra andre målinger:

- Vinkler - vha differenser af retningsmålinger.
- Arealer - vha vinkler og længder.
- Længder - vha trigonometriske relationer.
- ...

I kurset gennemgår vi hvorledes fejlene på de målbare størrelser influerer på de interessante ikke-målbare størrelser.

Eksempelvis kan arealet, T, af en trekant bestemmes ved

$$T = \frac{1}{2} ab \sin C,$$

hvor længdemålingerne a og b samt vinklen C måles med usikkerhed.

Kovariansmatrix

Indenfor statistik er størrelserne varians og kovarians af særlig interesse idet de beskriver hvorledes variable varierer og sam-varierer.

Typisk noteres varians og kovarians af $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ vha. en kovariansmatrix, K_X:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{V}(X_1) & \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_1, X_2) & \cdots & \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_1, X_n) \\ \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_2, X_1) & \mathbb{V}(X_2) & \cdots & \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_n, X_1) & \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_n, X_2) & \cdots & \mathbb{V}(X_n) \end{bmatrix}$$

Kovariansmatrix

Indenfor statistik er størrelserne varians og kovarians af særlig interesse idet de beskriver hvorledes variable varierer og sam-varierer.

Typisk noteres varians og kovarians af $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ vha. en kovariansmatrix, K_X:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{V}(X_1) & \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_1, X_2) & \cdots & \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_1, X_n) \\ \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_2, X_1) & \mathbb{V}(X_2) & \cdots & \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_n, X_1) & \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_n, X_2) & \cdots & \mathbb{V}(X_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

Kovariansmatrix

Indenfor statistik er størrelserne varians og kovarians af særlig interesse idet de beskriver hvorledes variable varierer og sam-varierer.

Typisk noteres varians og kovarians af $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ vha. en kovariansmatrix, K_X:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{V}(X_1) & \mathbb{C}\text{ov}(X_1, X_2) & \cdots & \mathbb{C}\text{ov}(X_1, X_n) \\ \mathbb{C}\text{ov}(X_2, X_1) & \mathbb{V}(X_2) & \cdots & \mathbb{C}\text{ov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{C}\text{ov}(X_n, X_1) & \mathbb{C}\text{ov}(X_n, X_2) & \cdots & \mathbb{V}(X_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

Dvs K_X er symmetrisk pga

$$\mathbb{C}\text{ov}(X_i, X_j) = \mathbb{C}\text{ov}(X_j, X_i) \quad \text{for alle } i \text{ og } j$$

Kovariansmatrix

Indenfor statistik er størrelserne varians og kovarians af særlig interesse idet de beskriver hvorledes variable varierer og sam-varierer.

Typisk noteres varians og kovarians af $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ vha. en kovariansmatrix, K_X:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{V}(X_1) & \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_1, X_2) & \cdots & \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_1, X_n) \\ \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_2, X_1) & \mathbb{V}(X_2) & \cdots & \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_n, X_1) & \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_n, X_2) & \cdots & \mathbb{V}(X_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

Når X_i og X_j er parvist uafhængige idet der gælder

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(X_i, X_j) = 0 \quad \text{for alle } i \text{ og } j$$

Lineær transformation

For en lineær funktion

$$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_n X_n$$

med $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X_i, X_j) = 0$ for alle i og j, gælder

$$\mathbb{V}(Y) = a_1^2 \mathbb{V}(X_1) + a_2^2 \mathbb{V}(X_2) + \cdots + a_n^2 \mathbb{V}(X_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2$$

Lineær transformation

For en lineær funktion

$$Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n$$

med $\mathbb{C}\text{ov}(X_i, X_j) = 0$ for alle i og j, gælder

$$\mathbb{V}(Y) = a_1^2\mathbb{V}(X_1) + a_2^2\mathbb{V}(X_2) + \cdots + a_n^2\mathbb{V}(X_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2$$

Vi kan opskrive ovenstående vha. matricer:

$$\mathbb{V}(Y) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Lineær transformation

For en lineær funktion

$$Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n$$

med $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X_i, X_j) = 0$ for alle i og j, gælder

$$\mathbb{V}(Y) = a_1^2\mathbb{V}(X_1) + a_2^2\mathbb{V}(X_2) + \cdots + a_n^2\mathbb{V}(X_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2$$

Vi kan opskrive ovenstående vha. matricer:

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(Y) &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1\sigma_1^2 \\ a_2\sigma_2^2 \\ \vdots \\ a_n\sigma_n^2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Lineær transformation

For en lineær funktion

$$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_n X_n$$

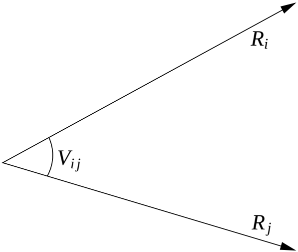
med $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X_i, X_j) = 0$ for alle i og j, gælder

$$\mathbb{V}(Y) = a_1^2 \mathbb{V}(X_1) + a_2^2 \mathbb{V}(X_2) + \cdots + a_n^2 \mathbb{V}(X_n) = \sum\nolimits_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2$$

Vi kan opskrive ovenstående vha. matricer:

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(Y) &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \sigma_1^2 \\ a_2 \sigma_2^2 \\ \vdots \\ a_n \sigma_n^2 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2
\end{aligned}$$

Eksempel - vinkelberegning



Vinkler bestemmes som differensen mellem to retningsbestemmelser. Fx. er $V_{ij} = R_j - R_i$ hvor både R_j og R_i er uafhængige stokastiske variable. Vi antager retningerne er målt med samme nøjagtighed, dvs $\mathbb{V}(R_j) = \mathbb{V}(R_i) = \sigma_R^2$. Variansen på V_{ji} er givet ved

$$\sigma_V^2 = \mathbb{V}(V_{ji}) = \mathbb{V}(R_j - R_i) = \mathbb{V}(R_j) + \mathbb{V}(R_i) = 2\sigma_R^2.$$

Vilkårlig transformation

I lektion 4 så vi hvorledes vi bestemmer $\mathbb{V}(Y)$ når Y er en *vilkårlig* (differentiabel) transformation g af $X_1, \ldots, X_n$, altså

$$
\begin{aligned}
Y &= g(X_1, X_2, \ldots, X_n) \\
&\approx g(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) + \frac{\partial g}{\partial X_1}(X_1 - \mu_1) + \cdots + \frac{\partial g}{\partial X_n}(X_n - \mu_n)
\end{aligned}
$$

Hvor vi altså laver en linear approximation af g omkring $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$.

Fejlforplantningensloven

Vi kan approximere variansen på Y,

$$\mathbb{V}(Y) \approx \mathbb{V}\left(g(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) + \frac{\partial g}{\partial X_1}(X_1 - \mu_1) + \cdots + \frac{\partial g}{\partial X_n}(X_n - \mu_n)\right)$$
$$= \left(\frac{\partial g}{\partial X_1}\right)^2 \mathbb{V}(X_1) + \cdots + \left(\frac{\partial g}{\partial X_n}\right)^2 \mathbb{V}(X_n)$$

For $\mathbb{V}(X_1) = \sigma_1^2, \ldots, \mathbb{V}(X_n) = \sigma_n^2$ og $\mathbb{V}(Y) = \sigma_Y^2$ er **fejlforplantningsloven**:

$$\sigma_Y^2 \approx \left(\frac{\partial g}{\partial X_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \cdots + \left(\frac{\partial g}{\partial X_n}\right)^2 \sigma_n^2$$

Bemærk at $\left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\right)^2$ ifølge teorien skal evalueres i μ_i. I praksis anvendes værdier tæt på μ_i, dvs estimatet for μ_i anvendes.

...med matricer

Fejlforplantningsloven kan ligeledes formuleres vha matricer:

$$\sigma_Y^2 \approx G K_X G^\top$$

G: Afhænger af relationen mellem de observerbare størrelser og Y.

K_X: Varianserne σ_i^2 hørende til instrumenterne er typisk oplyst af producenten.

...med matricer

$$\sigma_Y^2 \approx \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial X_1} & \frac{\partial g}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial X_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial X_1} \\ \frac{\partial g}{\partial X_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial X_n} \end{bmatrix}$$

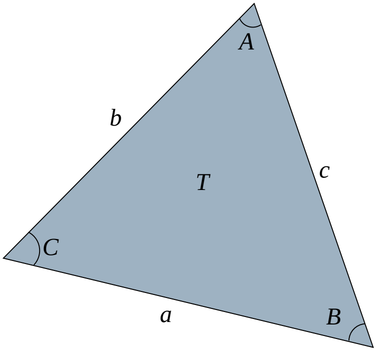
...med matricer

$$
\begin{aligned}
\sigma_Y^2 &\approx \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial X_1} & \frac{\partial g}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial X_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial X_1} \\ \frac{\partial g}{\partial X_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial X_n} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial X_1} & \frac{\partial g}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial X_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial X_1}\sigma_1^2 \\ \frac{\partial g}{\partial X_2}\sigma_2^2 \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial X_n}\sigma_n^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

...med matricer

$$
\begin{aligned}
\sigma_Y^2 &\approx \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial X_1} & \frac{\partial g}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial X_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial X_1} \\ \frac{\partial g}{\partial X_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial X_n} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial X_1} & \frac{\partial g}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial X_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial X_1}\sigma_1^2 \\ \frac{\partial g}{\partial X_2}\sigma_2^2 \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial X_n}\sigma_n^2 \end{bmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial g}{\partial X_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \cdots + \left(\frac{\partial g}{\partial X_n}\right)^2 \sigma_n^2
\end{aligned}
$$

Fejlforplantning ved arealbestemmelse



Arealet T kan bestemmes ved:

$$T = \frac{1}{2} ab \sin C$$

Fejlforplantning anvendt på T

Vi analyserer arealudtrykket: $T = \frac{1}{2} ab \sin C$.

Jf. fejlforplantningsloven gælder der,

$$\sigma_T^2 \quad \approx \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial a} & \frac{\partial T}{\partial b} & \frac{\partial T}{\partial C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_a^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_b^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_C^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial a} \\ \frac{\partial T}{\partial b} \\ \frac{\partial T}{\partial C} \end{bmatrix}$$

Fejlforplantning anvendt på T

Vi analyserer arealudtrykket: $T = \frac{1}{2}ab\sin C$.

Jf. fejlforplantningsloven gælder der,

$$\begin{aligned}
\sigma_T^2 &\approx \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial a} & \frac{\partial T}{\partial b} & \frac{\partial T}{\partial C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_a^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_b^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_C^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial a} \\ \frac{\partial T}{\partial b} \\ \frac{\partial T}{\partial C} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{T}{a} & \frac{T}{b} & \frac{T}{\tan C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_a^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_b^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_C^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{T}{a} \\ \frac{T}{b} \\ \frac{T}{\tan C} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Fejlforplantning anvendt på T

Vi analyserer arealudtrykket: $T = \frac{1}{2} ab \sin C$.

Jf. fejlforplantningsloven gælder der,

$$\begin{aligned}
\sigma_T^2 &\approx \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial a} & \frac{\partial T}{\partial b} & \frac{\partial T}{\partial C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_a^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_b^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_C^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial a} \\ \frac{\partial T}{\partial b} \\ \frac{\partial T}{\partial C} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{T}{a} & \frac{T}{b} & \frac{T}{\tan C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_a^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_b^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_C^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{T}{a} \\ \frac{T}{b} \\ \frac{T}{\tan C} \end{bmatrix} \\
&= \left(\frac{T}{a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{T}{b}\right)^2 \sigma_b^2 + \left(\frac{T}{\tan C}\right)^2 \sigma_C^2
\end{aligned}$$

Estimat af T og σ_T

I noternes eksempel 6 er følgende oplysninger givet:

$a = 115.53$ m, $b = 152.17$ m hvor $\sigma_a = \sigma_b = 1cm$.

$C = 93.273$ gon hvor $\sigma_C = 0.002$ gon.

Estimat af T og σ_T

I noternes eksempel 6 er følgende oplysninger givet:

$a = 115.53$ m, $b = 152.17$ m hvor $\sigma_a = \sigma_b = 1cm$.

$C = 93.273$ gon hvor $\sigma_C = 0.002$ gon.

Dvs. vi kan regne estimatet for T som

$$T = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}115.53\text{m} \times 152.17\text{m} \times \sin 93.273 = 8741.072\text{m}^2$$

Estimat af T og σ_T

I noternes eksempel 6 er følgende oplysninger givet:

$a = 115.53$ m, $b = 152.17$ m hvor $\sigma_a = \sigma_b = 1cm$.

$C = 93.273$ gon hvor $\sigma_C = 0.002$ gon.

Dvs. vi kan regne estimatet for T som

$$T = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} 115.53\text{m} \times 152.17\text{m} \times \sin 93.273 = 8741.072\text{m}^2$$

Tilsvarende kan vi indsætte vores observerede værdier (estimater for middelværdierne) i udtrykket for σ_T fra forrige slide:

$$\sigma_T^2 = \left(\frac{8741\text{m}^2}{115.53\text{m}}\right)^2 (0.01\text{m})^2 + \left(\frac{8741\text{m}^2}{152.17\text{m}}\right)^2 (0.01\text{m})^2 + \left(\frac{8741\text{m}^2}{\tan 93.273}\right)^2 \left(\frac{0.002\text{gon}}{\omega}\right)^2$$
$$= 0.9033\text{m}^4$$
$$\sigma_T = \sqrt{\sigma_T^2} = 0.9504\text{m}^2.$$

Konfidensinterval for T

Fra tidligere har vi at

$$\left[\bar{x} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ;\ \bar{x} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Vi har kun én observation i vores estimat af T, dvs $n = 1$ og dermed

$$[8741.072 - 1.96 \cdot 0.9504\ ;\ 8741.072 + 1.96 \cdot 0.9504] = [8739.210\ ;\ 8742.935]$$