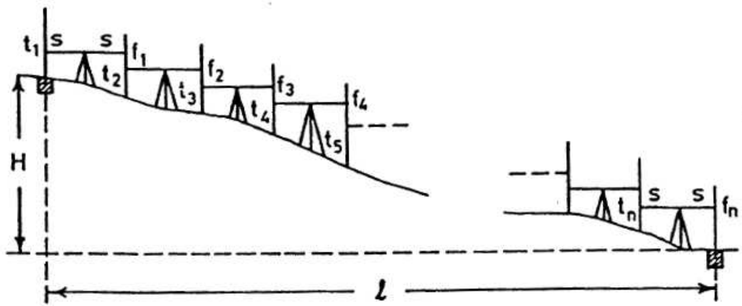
Landmålingens fejlteori
Fejlforplantning ved geometrisk nivellment
Lektion 6

Torben Tvedebrink - tvede@math.aau.dk
http://www.math.aau.dk/∼tvede/teaching/L4

Institut for Matematiske Fag
Aalborg Universitet

5. maj 2009

Geometrisk nivellement



t_i : stadieaflæsning ved tilbagesigte
f_i : stadieaflæsning ved fremsigte

$$h = (t_1 - f_1) + (t_2 - f_2) + \cdots + (t_n - f_n) = \sum_{i=1}^{n} t_i - f_i$$

Totallængden ℓ er opdelt i $2n$ stykker af længde s, dvs. $\ell = 2ns$.

Modellen

Vi antager af t_i og f_i er realisationer af uafhængige stokatiske variable T_i og F_i med samme varians σ_a^2, $i = 1, \ldots, n$. Denne antagelse kan begrundes med sigteafstanden er fast og den samme for alle observationer.

Ydermere bliver h således en realisation af den stokastiske variabel

$$H = \sum_{i=1}^{n} T_i - F_i.$$

Dvs:

$$\begin{array}{cccccc} T_1 & F_1 & \ldots & T_n & F_n & H \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ t_1 & f_1 & \ldots & t_n & f_n & h \end{array}$$

Variansen af højdemålingen

Variansen af H bestemmes ved

$$\mathbb{V}(H) = \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} T_i - F_i\right) = \sum_{i=1}^{n} [\mathbb{V}(T_i) + \mathbb{V}(F_i)] = \sum_{i=1}^{n} (\sigma_a^2 + \sigma_a^2) = 2n\sigma_a^2$$

Fra slide 2 er $2n = \ell/s$, således

$$\mathbb{V}(H) = \ell\sigma_a^2/s = \sigma_\ell^2.$$

Erfaringer viser at $\sigma_a/\sqrt{s}$ kun i ringe grad afhænger af s når $s < 100$ m.

Variansen af højdemålingen

Variansen af H bestemmes ved

$$\mathbb{V}(H) = \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} T_i - F_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left[\mathbb{V}(T_i) + \mathbb{V}(F_i)\right] = \sum_{i=1}^{n}(\sigma_a^2 + \sigma_a^2) = 2n\sigma_a^2$$

Fra slide 2 er $2n = \ell/s$, således

$$\mathbb{V}(H) = \ell\sigma_a^2/s = \sigma_\ell^2.$$

Erfaringer viser at $\sigma_a/\sqrt{s}$ kun i ringe grad afhænger af s når $s < 100$ m.

Således indføres kilometerspredningen $\sigma_k = \sigma_a/\sqrt{s}$ hvor af

$$\mathbb{V}(H) = \sigma_\ell^2 = \ell\sigma_a^2/s$$

Variansen af højdemålingen

Variansen af H bestemmes ved

$$\mathbb{V}(H) = \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} T_i - F_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left[\mathbb{V}(T_i) + \mathbb{V}(F_i)\right] = \sum_{i=1}^{n}(\sigma_a^2 + \sigma_a^2) = 2n\sigma_a^2$$

Fra slide 2 er $2n = \ell/s$, således

$$\mathbb{V}(H) = \ell\sigma_a^2/s = \sigma_\ell^2.$$

Erfaringer viser at $\sigma_a/\sqrt{s}$ kun i ringe grad afhænger af s når $s < 100$ m.

Således indføres kilometerspredningen $\sigma_k = \sigma_a/\sqrt{s}$ hvor af

$$\mathbb{V}(H) = \sigma_\ell^2 = \ell\sigma_a^2/s = \ell\sigma_k^2$$

σ_ℓ er således spredningen på et geometrisk nivellement over længden ℓ.

Vægtet model

Givet n uafhængige målinger $x_1, \ldots, x_n$ af n størrelser $\mu_1, \ldots, \mu_n$.

Målinger er ikke nødvendigvis af samme kvalitet. Fx. kan visse målinger være behæftet ved flere fejlkilder end andre, nogle kan være målt flere gange, etc.

Som tidligere er $x_1, \ldots, x_n$ realisationer af stokatiske variable $X_1, \ldots, X_n$, hvor $\mathbb{E}(X_i) = \mu_i$ og $\mathbb{V}(X_i) = \sigma_i^2$ ikke nødvendigvis er ens.

Vægtet model

Hver måling gives en vægt p_i som afspejler kvaliteten af målingen - desto højere vægt desto bedre måling.

Vægtene er positive tal der vælges således de opfylder vægtrelationen, dvs

$$p_1\sigma_1^2 = p_2\sigma_2^3 = \cdots = p_n\sigma_n^2.$$

Eks. hvis to variansen på første måling er dobbelt så stor på som den anden ($\sigma_1^2 = 2\sigma_2^2$), vælges $p_1 = 1$ og $p_2 = 2$ sådan at $p_1\sigma_1^2 = p_2\sigma_2^2$.

Altså, vægten på den bedste måling er dobbelt så stor som på den dårligere måling.

Vægtet gennemsnit

Antag at $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_n = \mu$, dvs alle observationer $x_1, \ldots, x_n$ er målinger af samme størrelse μ.

Fortsat kan er variansen ikke nødvendigvis den samme for alle målinger. Eks. kan der være anvendt måleudstyr af forskellige fabrikanter og/eller kvalitet.

Vægtet gennemsnit

Antag at $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_n = \mu$, dvs alle observationer $x_1, \ldots, x_n$ er målinger af samme størrelse μ.

Fortsat kan er variansen ikke nødvendigvis den samme for alle målinger. Eks. kan der være anvendt måleudstyr af forskellige fabrikanter og/eller kvalitet.

Til at estimere μ bruges det vægtede gennemsnit $\bar{x}^*$ således mere præcise målinger (observationer med lav varians) vægter mere i gennemsnittet end dårligere bestemte målinger.

$$\bar{x}^* = \frac{p_1}{\sum_{1=i}^n p_i} x_1 + \cdots + \frac{p_n}{\sum_{1=i}^n p_i} x_n = \frac{1}{\sum_{1=i}^n p_i}(p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n),$$

hvor vægtene er valgt så de opfylder $p_1 \sigma_1^2 = \cdots = p_n \sigma_n^2$.

Sætning

For den stokastiske variabel

$$\bar{X}^* = \frac{p_1}{\sum_{1=i}^n p_i} X_1 + \cdots + \frac{p_n}{\sum_{1=i}^n p_i} X_n = \frac{1}{\sum_{1=i}^n p_i} (p_1 X_1 + \cdots + p_n X_n)$$

gælder følgende udsagn

1. $\bar{X}^*$ er et centralt estimat, dvs. $\mathbb{E}(\bar{X}^*) = \mu$
2. For positive $p_1, \ldots, p_n$ er $\mathbb{V}(\bar{X}^*)$ mindst når vægtene opfylder $p_1 \sigma_1^2 = \cdots = p_n \sigma_n^2$.

Sætning - bevis

1. følger ved

$$\mathbb{E}(\bar{X}^*) \quad = \quad \mathbb{E}\left(\frac{1}{\sum_{1=i}^{n} p_i}[p_1 X_1 + \cdots + p_n X_n]\right)$$

Sætning - bevis

1. følger ved

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\bar{X}^*) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{\sum_{1=i}^n p_i}[p_1 X_1 + \cdots + p_n X_n]\right) \\ &= \frac{1}{\sum_{1=i}^n p_i}[p_1 \mathbb{E}(X_1) + \cdots + p_n \mathbb{E}(X_n)]\end{aligned}$$

Sætning - bevis

1. følger ved

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\bar{X}^*) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{\sum_{1=i}^{n} p_i}[p_1 X_1 + \cdots + p_n X_n]\right) \\
&= \frac{1}{\sum_{1=i}^{n} p_i}[p_1 \mathbb{E}(X_1) + \cdots + p_n \mathbb{E}(X_n)] \\
&= \frac{1}{\sum_{1=i}^{n} p_i}[p_1 \mu + \cdots + p_n \mu]
\end{aligned}
$$

Sætning - bevis

1. følger ved

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\bar{X}^*) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{\sum_{1=i}^n p_i}[p_1 X_1 + \cdots + p_n X_n]\right) \\
&= \frac{1}{\sum_{1=i}^n p_i}[p_1 \mathbb{E}(X_1) + \cdots + p_n \mathbb{E}(X_n)] \\
&= \frac{1}{\sum_{1=i}^n p_i}[p_1 \mu + \cdots + p_n \mu] \\
&= \mu \frac{1}{\sum_{1=i}^n p_i}(p_1 + \cdots + p_n) \\
&= \mu.
\end{aligned}
$$

Bevis - fortsat

Punkt 2 vises for $n = 2$, dvs vi betragter

$$\bar{X}^* = a_1 X_1 + a_2 X_2,$$

hvor $a_1 + a_2 = 1$ idet vægtene i sætningen p_1 og p_2 er givet så

$$\bar{X}^* = \frac{p_1}{p_1 + p_2} X_1 + \frac{p_2}{p_1 + p_2} X_2 \quad \text{altså} \quad \frac{p_1}{p_1 + p_2} + \frac{p_2}{p_1 + p_2} = 1.$$

Bevis - fortsat

Punkt 2 vises for $n = 2$, dvs vi betragter

$$\bar{X}^* = a_1 X_1 + a_2 X_2,$$

hvor $a_1 + a_2 = 1$ idet vægtene i sætningen p_1 og p_2 er givet så

$$\bar{X}^* = \frac{p_1}{p_1 + p_2} X_1 + \frac{p_2}{p_1 + p_2} X_2 \quad \text{altså} \quad \frac{p_1}{p_1 + p_2} + \frac{p_2}{p_1 + p_2} = 1.$$

Derfor $a_2 = 1 - a_1$, så variansen er givet ved

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(\bar{X}^*) &= \mathbb{V}(a_1 X_1 + a_2 X_2) \\ &= \mathbb{V}(a_1 X_1 + (1 - a_1) X_2) \\ &= a_1^2 \sigma_1^2 + (1 - a_1)^2 \sigma_2^2. \end{aligned}$$

Bevis - fortsat

Vi ønsker at variansen af $\bar{X}^*$ skal være mindst mulig.

Derfor minimeres udtrykket $\mathbb{V}(\bar{X}^*) = a_1^2\sigma_1^2 + (1-a_1)^2\sigma_2^2$ i a_1.

Differentiation mht a_1 giver

$$\frac{\partial \mathbb{V}(\bar{X}^*)}{\partial a_1} = 2a_1\sigma_1^2 + 2(1-a_1)(-1)\sigma_2^2$$

Bevis - fortsat

Vi ønsker at variansen af $\bar{X}^*$ skal være mindst mulig.

Derfor minimeres udtrykket $\mathbb{V}(\bar{X}^*) = a_1^2\sigma_1^2 + (1-a_1)^2\sigma_2^2$ i a_1.

Differentiation mht a_1 giver

$$\frac{\partial \mathbb{V}(\bar{X}^*)}{\partial a_1} = 2a_1\sigma_1^2 + 2(1-a_1)(-1)\sigma_2^2$$

Sættes dette lig nul får vi:

$$\begin{aligned} 0 &= 2a_1\sigma_1^2 + 2(1-a_1)(-1)\sigma_2^2 \\ a_1\sigma_1^2 &= (1-a_1)\sigma_2^2, \end{aligned}$$

Bevis - fortsat

Vi ønsker at variansen af $\bar{X}^*$ skal være mindst mulig.

Derfor minimeres udtrykket $\mathbb{V}(\bar{X}^*) = a_1^2\sigma_1^2 + (1-a_1)^2\sigma_2^2$ i a_1.

Differentiation mht a_1 giver

$$\frac{\partial \mathbb{V}(\bar{X}^*)}{\partial a_1} = 2a_1\sigma_1^2 + 2(1-a_1)(-1)\sigma_2^2$$

Sættes dette lig nul får vi:

$$\begin{aligned} 0 &= 2a_1\sigma_1^2 + 2(1-a_1)(-1)\sigma_2^2 \\ a_1\sigma_1^2 &= (1-a_1)\sigma_2^2, \end{aligned}$$

hvilket giver

$$a_1 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} \quad \text{og} \quad a_2 = 1 - a_1 = 1 - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}.$$

Bevis - fortsat

Dvs variansen $\mathbb{V}(a_1X_1 + a_2X_2)$ er mindst for $a_1\sigma_1^2 = a_2\sigma_2^2$ under antagelsen af $a_1 + a_2 = 1$.

Bevis - fortsat

Dvs variansen $\mathbb{V}(a_1X_1 + a_2X_2)$ er mindst for $a_1\sigma_1^2 = a_2\sigma_2^2$ under antagelsen af $a_1 + a_2 = 1$.

Bemærk at

$$a_1\sigma_1^2 = a_2\sigma_2^2$$

Bevis - fortsat

Dvs variansen $\mathbb{V}(a_1X_1 + a_2X_2)$ er mindst for $a_1\sigma_1^2 = a_2\sigma_2^2$ under antagelsen af $a_1 + a_2 = 1$.

Bemærk at

$$a_1\sigma_1^2 = a_2\sigma_2^2 \;\Leftrightarrow\; \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\sigma_1^2 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\sigma_2^2$$

Bevis - fortsat

Dvs variansen $\mathbb{V}(a_1X_1 + a_2X_2)$ er mindst for $a_1\sigma_1^2 = a_2\sigma_2^2$ under antagelsen af $a_1 + a_2 = 1$.

Bemærk at

$$a_1\sigma_1^2 = a_2\sigma_2^2 \;\Leftrightarrow\; \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\sigma_1^2 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\sigma_2^2 \;\Leftrightarrow\; \sigma_2^2\sigma_1^2 = \sigma_1^2\sigma_2^2,$$

dvs variansen er mindst når vægtrelationen er opfyldt.

Bevis - fortsat

Dvs variansen $\mathbb{V}(a_1 X_1 + a_2 X_2)$ er mindst for $a_1\sigma_1^2 = a_2\sigma_2^2$ under antagelsen af $a_1 + a_2 = 1$.

Bemærk at

$$a_1\sigma_1^2 = a_2\sigma_2^2 \;\Leftrightarrow\; \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\sigma_1^2 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\sigma_2^2 \;\Leftrightarrow\; \sigma_2^2\sigma_1^2 = \sigma_1^2\sigma_2^2,$$

dvs variansen er mindst når vægtrelationen er opfyldt.

Sættes $a_1 = \frac{p_1}{p_1+p_2}$ og $a_2 = \frac{p_2}{p_1+p_2}$ er sætningen således bevist, dvs

$$\mathbb{V}(\bar{X}^*) = \mathbb{V}\left(\frac{p_1}{p_1+p_2}X_1 + \frac{p_2}{p_1+p_2}X_2\right) \quad \text{er mindst for} \quad p_1\sigma_1^2 = p_2\sigma_2^2.$$

Estimator af σ_0^2

Idet vægtrelationen foreskriver $p_i\sigma_i^2$ er ens for alle i, kan σ_0^2 indføres som

$$\sigma_0^2 = p_1\sigma_1^2 = \cdots = p_2\sigma_2^2.$$

Estimator af σ_0^2

Idet vægtrelationen foreskriver $p_i\sigma_i^2$ er ens for alle i, kan σ_0^2 indføres som

$$\sigma_0^2 = p_1\sigma_1^2 = \cdots = p_2\sigma_2^2.$$

Som estimator for σ_0^2 anvendes

$$S_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^n p_i(X_i - \bar{X}^*)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i X_i^2 - (\bar{X}^*)^2 \sum_{i=1}^n p_i}{n-1}.$$

Estimator af σ_0^2

Idet vægtrelationen foreskriver $p_i\sigma_i^2$ er ens for alle i, kan σ_0^2 indføres som

$$\sigma_0^2 = p_1\sigma_1^2 = \cdots = p_2\sigma_2^2.$$

Som estimator for σ_0^2 anvendes

$$S_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^n p_i(X_i - \bar{X}^*)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i X_i^2 - (\bar{X}^*)^2 \sum_{i=1}^n p_i}{n-1}.$$

Variansen af $\bar{X}^*$ og σ_0.

Lad $p_+ = \sum_{i=1}^{n} p_i$ og dermed $\bar{X}^* = \frac{p_1}{p_+}X_1 + \cdots + \frac{p_n}{p_+}X_n$.
Bemærk

$$\mathbb{V}(\bar{X}^*) = \mathbb{V}\left(\frac{p_1}{p_+}X_1 + \cdots + \frac{p_n}{p_+}X_n\right)$$

Variansen af $\bar{X}^*$ og σ_0.

Lad $p_+ = \sum_{i=1}^n p_i$ og dermed $\bar{X}^* = \frac{p_1}{p_+}X_1 + \cdots + \frac{p_n}{p_+}X_n$.
Bemærk

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(\bar{X}^*) &= \mathbb{V}\left(\frac{p_1}{p_+}X_1 + \cdots + \frac{p_n}{p_+}X_n\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{p_i}{p_+}\right)^2 \mathbb{V}(X_i) \end{aligned}$$

Variansen af $\bar{X}^*$ og σ_0.

Lad $p_+ = \sum_{i=1}^n p_i$ og dermed $\bar{X}^* = \frac{p_1}{p_+}X_1 + \cdots + \frac{p_n}{p_+}X_n$.
Bemærk

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(\bar{X}^*) &= \mathbb{V}\left(\frac{p_1}{p_+}X_1 + \cdots + \frac{p_n}{p_+}X_n\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\frac{p_i}{p_+}\right)^2 \mathbb{V}(X_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2 \sigma_i^2}{p_+^2}
\end{aligned}$$

Variansen af $\bar{X}^*$ og σ_0.

Lad $p_+ = \sum_{i=1}^n p_i$ og dermed $\bar{X}^* = \frac{p_1}{p_+}X_1 + \cdots + \frac{p_n}{p_+}X_n$.
Bemærk

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(\bar{X}^*) &= \mathbb{V}\left(\frac{p_1}{p_+}X_1 + \cdots + \frac{p_n}{p_+}X_n\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\frac{p_i}{p_+}\right)^2 \mathbb{V}(X_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2\sigma_i^2}{p_+^2} \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{p_i\sigma_0^2}{p_+^2} \quad \text{pga. } \sigma_0^2 = p_1\sigma_1^2 = \cdots = p_n\sigma_n^2
\end{aligned}$$

Variansen af $\bar{X}^*$ og σ_0.

Lad $p_+ = \sum_{i=1}^n p_i$ og dermed $\bar{X}^* = \frac{p_1}{p_+}X_1 + \cdots + \frac{p_n}{p_+}X_n$.
Bemærk

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(\bar{X}^*) &= \mathbb{V}\left(\frac{p_1}{p_+}X_1 + \cdots + \frac{p_n}{p_+}X_n\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\frac{p_i}{p_+}\right)^2 \mathbb{V}(X_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2\sigma_i^2}{p_+^2} \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{p_i\sigma_0^2}{p_+^2} \quad \text{pga. } \sigma_0^2 = p_1\sigma_1^2 = \cdots = p_n\sigma_n^2 \\
&= \sigma_0^2 \frac{\sum_{i=1}^n p_i}{\left(\sum_{i=1}^n p_i\right)^2}
\end{aligned}$$

Variansen af $\bar{X}^*$ og σ_0.

Lad $p_+ = \sum_{i=1}^n p_i$ og dermed $\bar{X}^* = \frac{p_1}{p_+} X_1 + \cdots + \frac{p_n}{p_+} X_n$.
Bemærk

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}(\bar{X}^*) &= \mathbb{V}\left(\frac{p_1}{p_+} X_1 + \cdots + \frac{p_n}{p_+} X_n\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\frac{p_i}{p_+}\right)^2 \mathbb{V}(X_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2 \sigma_i^2}{p_+^2} \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{p_i \sigma_0^2}{p_+^2} \quad \text{pga. } \sigma_0^2 = p_1 \sigma_1^2 = \cdots = p_n \sigma_n^2 \\
&= \sigma_0^2 \frac{\sum_{i=1}^n p_i}{\left(\sum_{i=1}^n p_i\right)^2} = \frac{\sigma_0^2}{\sum_{i=1}^n p_i}.
\end{aligned}
$$

Estimat af σ_0^2

Således er variansen på det vægtede gennemsnit givet ved

$$\mathbb{V}(\bar{X}^*) = \frac{\sigma_0^2}{\sum_{i=1}^n p_i} \quad \text{og dermed} \quad \bar{X}^* \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma_0^2}{\sum_{i=1}^n p_i}\right)$$

Som estimat af S_0^2 anvendes s_0^2, hvor de stokatiske variable er erstattet af de observerede værdier,

$$s_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^n p_i(x_i - \bar{x}^*)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - (\bar{x}^*)^2 \sum_{i=1}^n p_i}{n-1}.$$

Estimat af σ_0^2

Således er variansen på det vægtede gennemsnit givet ved

$$\mathbb{V}(\bar{X}^*) = \frac{\sigma_0^2}{\sum_{i=1}^n p_i} \quad \text{og dermed} \quad \bar{X}^* \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma_0^2}{\sum_{i=1}^n p_i}\right)$$

Som estimat af S_0^2 anvendes s_0^2, hvor de stokatiske variable er erstattet af de observerede værdier,

$$s_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^n p_i(x_i - \bar{x}^*)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - (\bar{x}^*)^2 \sum_{i=1}^n p_i}{n-1}.$$

Estimatet for variansen af det vægtede gennemsnit er således $\frac{s_0^2}{\sum_{i=1}^n p_i}$.

Estimat af σ_0^2

Således er variansen på det vægtede gennemsnit givet ved

$$\mathbb{V}(\bar{X}^*) = \frac{\sigma_0^2}{\sum_{i=1}^n p_i} \quad \text{og dermed} \quad \bar{X}^* \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma_0^2}{\sum_{i=1}^n p_i}\right)$$

Som estimat af S_0^2 anvendes s_0^2, hvor de stokatiske variable er erstattet af de observerede værdier,

$$s_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^n p_i(x_i - \bar{x}^*)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - (\bar{x}^*)^2 \sum_{i=1}^n p_i}{n-1}.$$

Estimatet for variansen af det vægtede gennemsnit er således $\frac{s_0^2}{\sum_{i=1}^n p_i}$.

Pga. vægtrelationen kan den i'te varians σ_i^2 skrives som $\sigma_i^2 = \sigma_0^2/p_i$. Heraf kan σ_i^2 estimeres vha. s_0^2/p_i.

Eksempel - Geometrisk nivellement

Højdeforskel nivelleret over n strækninger med *samme* kilometerspredning σ_k. Variansen over en længde ℓ er fra tidligere givet ved $\sigma_k^2 \ell$.

Højdeforskel h	Længde ℓ	Varians på h over ℓ
h_1	ℓ_1	$\sigma_1^2 = \sigma_k^2 \ell_1$
h_2	ℓ_2	$\sigma_2^2 = \sigma_k^2 \ell_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
h_n	ℓ_n	$\sigma_n^2 = \sigma_k^2 \ell_n$

Forskellig varians på målinger pga $\ell_i \neq \ell_j$, dvs. vægtede observationer.

Eksempel - Geometrisk nivellement

Vægtrelationen er opfyldt når

$$\sigma_0^2 = p_1\sigma_1^2 = \cdots = p_n\sigma_n^2$$

Eksempel - Geometrisk nivellement

Vægtrelationen er opfyldt når

$$\sigma_0^2 = p_1\sigma_1^2 = \cdots = p_n\sigma_n^2$$

Indsættes udtrykket for $\sigma_i^2 = \ell_i\sigma_k^2$ har vi:

$$\sigma_0^2 = p_1\sigma_k^2\ell_1 = \cdots = p_n\sigma_k^2\ell_n$$

Eksempel - Geometrisk nivellement

Vægtrelationen er opfyldt når

$$\sigma_0^2 = p_1\sigma_1^2 = \cdots = p_n\sigma_n^2$$

Indsættes udtrykket for $\sigma_i^2 = \ell_i\sigma_k^2$ har vi:

$$\sigma_0^2 = p_1\sigma_k^2\ell_1 = \cdots = p_n\sigma_k^2\ell_n$$

Heraf fremgår det at hvis $p_i = \ell_i^{-1}$ er ligheden opfyldt:

$$\begin{aligned}\sigma_0^2 &= \ell_1^{-1}\sigma_k^2\ell_1 = \cdots = \ell_n^{-1}\sigma_k^2\ell_n \\ &= \sigma_k^2 = \cdots = \sigma_k^2.\end{aligned}$$

Dvs. vægte kan vælges til $p_i = (\ell_i)^{-1}$ altså er vægten den resiprokke længde.

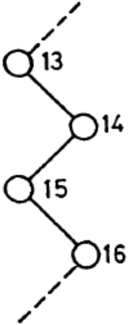
Eksempel - polygonvinkler

Vi måler vinklerne i punkterne 13-16.

Alle vinkler er målt med samme varians σ_v^2.

Lad $\sigma_{m,i}^2$ være variansen af middelsatsen i punkt i.

Punkt	Antal satser	$\sigma_{m,i}^2$
13	2	$\sigma_{m,13}^2 = \dfrac{\sigma_v^2}{2}$
14	3	$\sigma_{m,14}^2 = \dfrac{\sigma_v^2}{3}$
15	4	$\sigma_{m,15}^2 = \dfrac{\sigma_v^2}{4}$
16	6	$\sigma_{m,16}^2 = \dfrac{\sigma_v^2}{6}$



Eksempel - fortsat

Ifølge vægtrelationen skal $p_i \sigma^2_{m,i}$ være ens for alle i,

$$p_{13}\sigma^2_{m,13} = p_{14}\sigma^2_{m,14} = p_{15}\sigma^2_{m,15} = p_{16}\sigma^2_{m,16}.$$

Jf. udtrykkene fra forrige slide

$$p_{13}\frac{\sigma_v^2}{2} = p_{14}\frac{\sigma_v^2}{3} = p_{15}\frac{\sigma_v^2}{4} = p_{16}\frac{\sigma_v^2}{6}.$$

Således kan vægtene vælges lig antal satser for hvert punkt.

Eksempel - Vinkelmålinger

Vinkler målt med forskellige satser med samme vinkelspredning σ_v.
Variansen på vinkler målt med k satser er fra tidligere givet ved σ_v^2/k.

Vinkel v	Sats k	Varians på middelsats
v_1	k_1	$\sigma_1^2 = \sigma_v^2/k_1$
v_2	k_2	$\sigma_2^2 = \sigma_v^2/k_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
v_n	k_n	$\sigma_n^2 = \sigma_v^2/k_n$

Forskellig varians på målinger pga. forskelligt antal satser, dvs. vægtede observationer.

Eksempel - Vinkelmålinger

Vinkler målt med forskellige satser med samme vinkelspredning σ_v.
Variansen på vinkler målt med k satser er fra tidligere givet ved σ_v^2/k.

Vinkel v	Sats k	Varians på middelsats
v_1	k_1	$\sigma_1^2 = \sigma_v^2/k_1$
v_2	k_2	$\sigma_2^2 = \sigma_v^2/k_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
v_n	k_n	$\sigma_n^2 = \sigma_v^2/k_n$

Forskellig varians på målinger pga. forskelligt antal satser, dvs. vægtede observationer.

Vægtrelationen er opfyldt når

$$\sigma_0^2 = p_1\sigma_1^2 = \cdots = p_n\sigma_n^2.$$

Fra tabellen ses det at vægten kan vælges til $p_i = k_i$ dvs vægten er antal satser.