Landmålingens fejlteori
Fordeling af slutfejl
Lektion 7

Torben Tvedebrink - tvede@math.aau.dk
http://www.math.aau.dk/∼tvede/teaching/L4

Institut for Matematiske Fag
Aalborg Universitet

12. maj 2009

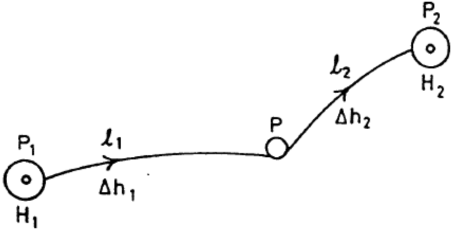
Fordeling af slutfejl

Fordelingen af slutfejlen i landmåling er ofte en interessant størrelse.

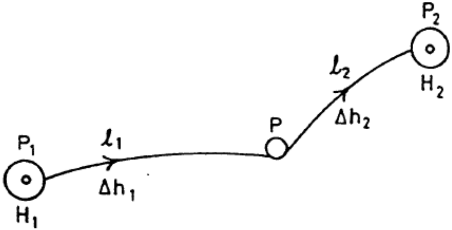
Hvis vi på forhånd har oplysninger vinkelsummer (fx. 200 gon i trekant), højdeforskelle (fx. fikspunkter ved nivellement) eller andre konstanter kan vi inddrage denne information i vores beregninger.

Nivellement - bestemmelse af kote

Vi ønsker at beregne koten μ til punktet P med højdeforskelle Δh_1 til P_1 og Δh_2 til P_2. Længderne fra P til de to punkter P_1 og P_2 er henholdvis ℓ_1 og ℓ_2.

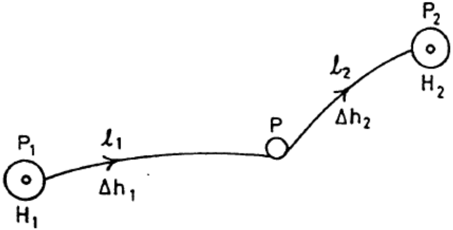


Model



X_{H_1} og X_{H_2} er uafhængige stokatiske variable med $\mathbb{E}(X_{H_1}) = \mathbb{E}(X_{H_1}) = \mu$,

Model



X_{H_1} og X_{H_2} er uafhængige stokatiske variable med $\mathbb{E}(X_{H_1}) = \mathbb{E}(X_{H_1}) = \mu$,

$$\begin{array}{cc} X_{H_1} & X_{H_2} \\ \downarrow & \downarrow \\ H_1 + \Delta h_1 & H_2 - \Delta h_2 \end{array}$$

Fra sidste gang har vi at $\mathbb{V}(X_{H_1}) = \ell_1 \sigma_k^2$ og $\mathbb{V}(X_{H_2}) = \ell_2 \sigma_k^2$.

Estimat af μ

Til at estimere μ anvendes det vægtede gennemsnit $\bar{x}^*$ idet varianserne på højdemålingerne ikke nødvendigvis er ens,

$$\bar{x}^* = \frac{p_1}{p_1 + p_2}(H_1 + \Delta h_1) + \frac{p_2}{p_1 + p_2}(H_2 - \Delta h_2),$$

hvor vægtene p_1 og p_2 opfylder vægtrelationen $p_1 \ell_1 \sigma_k^2 = p_2 \ell_2 \sigma_k^2$.

Estimat af μ

Til at estimere μ anvendes det vægtede gennemsnit $\bar{x}^*$ idet varianserne på højdemålingerne ikke nødvendigvis er ens,

$$\bar{x}^* = \frac{p_1}{p_1 + p_2}(H_1 + \Delta h_1) + \frac{p_2}{p_1 + p_2}(H_2 - \Delta h_2),$$

hvor vægtene p_1 og p_2 opfylder vægtrelationen $p_1 \ell_1 \sigma_k^2 = p_2 \ell_2 \sigma_k^2$.

Dvs de reciprokke længder kan anvendes som vægte,

$$p_1 = \ell_1^{-1} \quad \text{og} \quad p_2 = \ell_2^{-1}.$$

Estimatet for μ er altså givet ved:

$$\bar{x}^* = \frac{\ell_1^{-1}}{\ell_1^{-1} + \ell_2^{-1}}(H_1 + \Delta h_1) + \frac{\ell_2^{-1}}{\ell_1^{-1} + \ell_2^{-1}}(H_2 - \Delta h_2).$$

Estimat af μ - fortsat

Vi kan omskrive udtrykket for $\bar{x}^*$ således:

$$\bar{x}^* = \frac{\ell_1^{-1}}{\ell_1^{-1} + \ell_2^{-1}}(H_1 + \Delta h_1) + \frac{\ell_2^{-1}}{\ell_1^{-1} + \ell_2^{-1}}(H_2 - \Delta h_2)$$

Estimat af μ - fortsat

Vi kan omskrive udtrykket for $\bar{x}^*$ således:

$$\begin{aligned}
\bar{x}^* &= \frac{\ell_1^{-1}}{\ell_1^{-1}+\ell_2^{-1}}(H_1+\Delta h_1)+\frac{\ell_2^{-1}}{\ell_1^{-1}+\ell_2^{-1}}(H_2-\Delta h_2) \\
&= \frac{1}{\ell_1}\frac{1}{\frac{1}{\ell_1}+\frac{1}{\ell_2}}(H_1+\Delta h_1)+\frac{1}{\ell_2}\frac{1}{\frac{1}{\ell_1}+\frac{1}{\ell_2}}(H_2-\Delta h_2)
\end{aligned}$$

Estimat af μ - fortsat

Vi kan omskrive udtrykket for $\bar{x}^*$ således:

$$
\begin{aligned}
\bar{x}^* &= \frac{\ell_1^{-1}}{\ell_1^{-1}+\ell_2^{-1}}(H_1+\Delta h_1) + \frac{\ell_2^{-1}}{\ell_1^{-1}+\ell_2^{-1}}(H_2-\Delta h_2) \\
&= \frac{1}{\ell_1}\frac{1}{\frac{1}{\ell_1}+\frac{1}{\ell_2}}(H_1+\Delta h_1) + \frac{1}{\ell_2}\frac{1}{\frac{1}{\ell_1}+\frac{1}{\ell_2}}(H_2-\Delta h_2) \\
&= \frac{1}{\ell_1}\frac{1}{\frac{\ell_2}{\ell_1\ell_2}+\frac{\ell_1}{\ell_1\ell_2}}(H_1+\Delta h_1) + \frac{1}{\ell_2}\frac{1}{\frac{\ell_2}{\ell_1\ell_2}+\frac{\ell_1}{\ell_1\ell_2}}(H_2-\Delta h_2)
\end{aligned}
$$

Estimat af μ - fortsat

Vi kan omskrive udtrykket for $\bar{x}^*$ således:

$$\begin{aligned}
\bar{x}^* &= \frac{\ell_1^{-1}}{\ell_1^{-1}+\ell_2^{-1}}(H_1+\Delta h_1)+\frac{\ell_2^{-1}}{\ell_1^{-1}+\ell_2^{-1}}(H_2-\Delta h_2) \\
&= \frac{1}{\ell_1}\frac{1}{\frac{1}{\ell_1}+\frac{1}{\ell_2}}(H_1+\Delta h_1)+\frac{1}{\ell_2}\frac{1}{\frac{1}{\ell_1}+\frac{1}{\ell_2}}(H_2-\Delta h_2) \\
&= \frac{1}{\ell_1}\frac{1}{\frac{\ell_2}{\ell_1\ell_2}+\frac{\ell_1}{\ell_1\ell_2}}(H_1+\Delta h_1)+\frac{1}{\ell_2}\frac{1}{\frac{\ell_2}{\ell_1\ell_2}+\frac{\ell_1}{\ell_1\ell_2}}(H_2-\Delta h_2) \\
&= \frac{1}{\ell_1}\frac{\ell_1\ell_2}{\ell_2+\ell_1}(H_1+\Delta h_1)+\frac{1}{\ell_2}\frac{\ell_1\ell_2}{\ell_2+\ell_1}(H_2-\Delta h_2)
\end{aligned}$$

Estimat af μ - fortsat

Vi kan omskrive udtrykket for $\bar{x}^*$ således:

$$\begin{aligned}
\bar{x}^* &= \frac{\ell_1^{-1}}{\ell_1^{-1}+\ell_2^{-1}}(H_1+\Delta h_1)+\frac{\ell_2^{-1}}{\ell_1^{-1}+\ell_2^{-1}}(H_2-\Delta h_2)\\
&= \frac{1}{\ell_1}\frac{1}{\frac{1}{\ell_1}+\frac{1}{\ell_2}}(H_1+\Delta h_1)+\frac{1}{\ell_2}\frac{1}{\frac{1}{\ell_1}+\frac{1}{\ell_2}}(H_2-\Delta h_2)\\
&= \frac{1}{\ell_1}\frac{1}{\frac{\ell_2}{\ell_1\ell_2}+\frac{\ell_1}{\ell_1\ell_2}}(H_1+\Delta h_1)+\frac{1}{\ell_2}\frac{1}{\frac{\ell_2}{\ell_1\ell_2}+\frac{\ell_1}{\ell_1\ell_2}}(H_2-\Delta h_2)\\
&= \frac{1}{\ell_1}\frac{\ell_1\ell_2}{\ell_2+\ell_1}(H_1+\Delta h_1)+\frac{1}{\ell_2}\frac{\ell_1\ell_2}{\ell_2+\ell_1}(H_2-\Delta h_2)\\
&= \frac{\ell_2}{\ell_2+\ell_1}(H_1+\Delta h_1)+\frac{\ell_1}{\ell_2+\ell_1}(H_2-\Delta h_2)
\end{aligned}$$

Slutfejlen r_n

På grund af målefejl er $\Delta h_1 + \Delta h_2 \neq H_2 - H_1$. Derfor indføres slutfejlen r_n som korrektion

$$\Delta h_1 + \Delta h_2 + r_n = H_2 - H_1$$

Slutfejlen r_n

På grund af målefejl er $\Delta h_1 + \Delta h_2 \neq H_2 - H_1$. Derfor indføres slutfejlen r_n som korrektion

$$\Delta h_1 + \Delta h_2 + r_n = H_2 - H_1 \quad \Leftrightarrow \quad H_2 - \Delta h_2 = H_1 + \Delta h_1 + r_n.$$

Slutfejlen r_n

På grund af målefejl er $\Delta h_1 + \Delta h_2 \neq H_2 - H_1$. Derfor indføres slutfejlen r_n som korrektion

$$\Delta h_1 + \Delta h_2 + r_n = H_2 - H_1 \quad \Leftrightarrow \quad H_2 - \Delta h_2 = H_1 + \Delta h_1 + r_n.$$

Indsættes dette i udtrykket for $\bar{x}^*$ får vi

$$\bar{x}^* = \frac{\ell_2}{\ell_2 + \ell_1}(H_1 + \Delta h_1) + \frac{\ell_1}{\ell_2 + \ell_1}(H_2 - \Delta h_2)$$

Slutfejlen r_n

På grund af målefejl er $\Delta h_1 + \Delta h_2 \neq H_2 - H_1$. Derfor indføres slutfejlen r_n som korrektion

$$\Delta h_1 + \Delta h_2 + r_n = H_2 - H_1 \quad \Leftrightarrow \quad H_2 - \Delta h_2 = H_1 + \Delta h_1 + r_n.$$

Indsættes dette i udtrykket for $\bar{x}^*$ får vi

$$\begin{aligned} \bar{x}^* &= \frac{\ell_2}{\ell_2 + \ell_1}(H_1 + \Delta h_1) + \frac{\ell_1}{\ell_2 + \ell_1}(H_2 - \Delta h_2) \\ &= \frac{\ell_2}{\ell_2 + \ell_1}(H_1 + \Delta h_1) + \frac{\ell_1}{\ell_2 + \ell_1}(H_1 + \Delta h_1 + r_n) \end{aligned}$$

Slutfejlen r_n

På grund af målefejl er $\Delta h_1 + \Delta h_2 \neq H_2 - H_1$. Derfor indføres slutfejlen r_n som korrektion

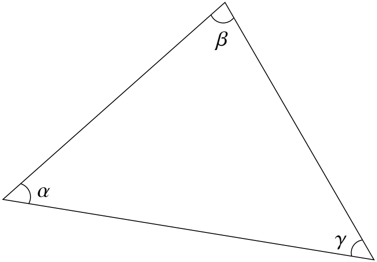
$$\Delta h_1 + \Delta h_2 + r_n = H_2 - H_1 \quad \Leftrightarrow \quad H_2 - \Delta h_2 = H_1 + \Delta h_1 + r_n.$$

Indsættes dette i udtrykket for $\bar{x}^*$ får vi

$$\begin{aligned}
\bar{x}^* &= \frac{\ell_2}{\ell_2 + \ell_1}(H_1 + \Delta h_1) + \frac{\ell_1}{\ell_2 + \ell_1}(H_2 - \Delta h_2) \\
&= \frac{\ell_2}{\ell_2 + \ell_1}(H_1 + \Delta h_1) + \frac{\ell_1}{\ell_2 + \ell_1}(H_1 + \Delta h_1 + r_n) \\
&= (H_1 + \Delta h_1) + \frac{\ell_1}{\ell_2 + \ell_1} r_n
\end{aligned}$$

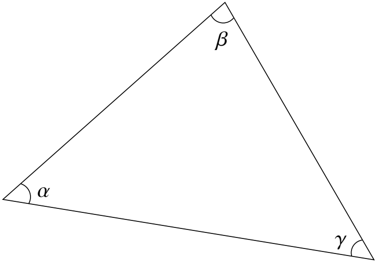
Slutfejlen på estimatet $\bar{x}^*$ af koten μ skal under de anvendte vægte (reciprokke længdemål) fordeles proportionalt med vejlængden.

Slutfejl af vinkelmålinger i trekant



Betragt trekanten med sande vinkler α, β og γ. Dvs $\alpha + \beta + \gamma = 200$ gon.

Slutfejl af vinkelmålinger i trekant



Betragt trekanten med sande vinkler α, β og γ. Dvs $\alpha + \beta + \gamma = 200$ gon.

$$\begin{array}{ccc} X_\alpha & X_\beta & X_\gamma \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_\alpha & x_\beta & x_\gamma \end{array}$$

$\mathbb{E}(X_\alpha) = \alpha$, $\mathbb{E}(X_\beta) = \beta$ og $\mathbb{E}(X_\gamma) = \gamma$. $\mathbb{V}(X_\alpha) = \mathbb{V}(X_\beta) = \mathbb{V}(X_\gamma) = \sigma^2$.

Model for vinkler i trekant

På grund af betingelsen om en vinkelsum på 200 gon, kan modellen simplificeres,

$$\begin{array}{cc} X_\alpha & 200 - X_\beta - X_\gamma \\ \downarrow & \downarrow \\ x_\alpha & 200 - x_\beta - x_\gamma \end{array}$$

Fra vores viden om lineære transformationer om $\mathbb{E}$ og $\mathbb{V}$ har vi at,

$$\mathbb{E}(X_\alpha) = \alpha \qquad \mathbb{E}(200 - X_\beta - X_\gamma) = 200 - \beta - \gamma$$
$$\mathbb{V}(X_\alpha) = \sigma^2 \qquad \mathbb{V}(200 - X_\beta - X_\gamma) = 2\sigma^2$$

Estimat af α

Idet variansen for de to observationer er forskellig anvendes det vægtede gennemsnit til at estimere α.

Bemærk at både x_α (direkte måling) og $200 - x_\beta - x_\gamma$ (indirekte måling) er observationer til at estimere den sande værdi α.

$$\bar{x}^* = \frac{p_1}{p_1 + p_2} x_\alpha + \frac{p_1}{p_1 + p_2}(200 - x_\beta - x_\gamma).$$

Estimat af α

Idet variansen for de to observationer er forskellig anvendes det vægtede gennemsnit til at estimere α.

Bemærk at både x_α (direkte måling) og $200 - x_\beta - x_\gamma$ (indirekte måling) er observationer til at estimere den sande værdi α.

$$\bar{x}^* = \frac{p_1}{p_1 + p_2} x_\alpha + \frac{p_1}{p_1 + p_2}(200 - x_\beta - x_\gamma).$$

Igen skal vægtene p_1 og p_2 opfylde vægtrelationen $p_1\sigma_1^2 = p_2\sigma_2^2$.

Idet $\sigma_1^2 = \sigma^2$ og $\sigma_2^2 = 2\sigma^2$ vælges $p_1 = 2$ og $p_2 = 1$. Hermed har vi

$$\bar{x}^* = \frac{2}{3} x_\alpha + \frac{1}{3}(200 - x_\beta - x_\gamma).$$

Slutfejlen r_v på vinkelsummen

Som i foregående eksempel er summen af x_α, x_β og x_γ ikke 200 pga. uundgålige målefejl.

Derfor indføres r_v således

$$x_\alpha + x_\beta + x_\gamma + r_v = 200$$

Slutfejlen r_v på vinkelsummen

Som i foregående eksempel er summen af x_α, x_β og x_γ ikke 200 pga. uundgålige målefejl.

Derfor indføres r_v således

$$x_\alpha + x_\beta + x_\gamma + r_v = 200 \quad \Leftrightarrow \quad 200 - x_\beta - x_\gamma = x_\alpha + r_v,$$

Slutfejlen r_v på vinkelsummen

Som i foregående eksempel er summen af x_α, x_β og x_γ ikke 200 pga. uundgålige målefejl.

Derfor indføres r_v således

$$x_\alpha + x_\beta + x_\gamma + r_v = 200 \quad \Leftrightarrow \quad 200 - x_\beta - x_\gamma = x_\alpha + r_v,$$

og dette indsættes i udtrykke for $\bar{x}^*$,

$$\bar{x}^* \quad = \quad \frac{2}{3}x_\alpha + \frac{1}{3}(200 - x_\beta - x_\gamma)$$

Slutfejlen r_v på vinkelsummen

Som i foregående eksempel er summen af x_α, x_β og x_γ ikke 200 pga. uundgålige målefejl.

Derfor indføres r_v således

$$x_\alpha + x_\beta + x_\gamma + r_v = 200 \quad \Leftrightarrow \quad 200 - x_\beta - x_\gamma = x_\alpha + r_v,$$

og dette indsættes i udtrykke for $\bar{x}^*$,

$$\begin{aligned} \bar{x}^* &= \frac{2}{3}x_\alpha + \frac{1}{3}(200 - x_\beta - x_\gamma) \\ &= \frac{2}{3}x_\alpha + \frac{1}{3}(x_\alpha + r_v) \end{aligned}$$

Slutfejlen r_v på vinkelsummen

Som i foregående eksempel er summen af x_α, x_β og x_γ ikke 200 pga. uundgålige målefejl.

Derfor indføres r_v således

$$x_\alpha + x_\beta + x_\gamma + r_v = 200 \quad \Leftrightarrow \quad 200 - x_\beta - x_\gamma = x_\alpha + r_v,$$

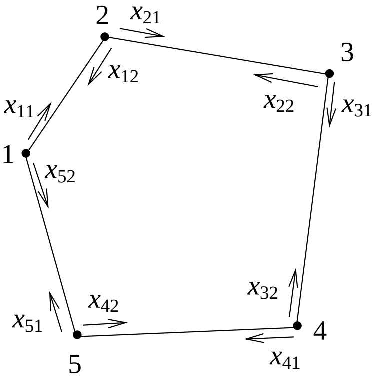
og dette indsættes i udtrykke for $\bar{x}^*$,

$$\begin{aligned} \bar{x}^* &= \frac{2}{3}x_\alpha + \frac{1}{3}(200 - x_\beta - x_\gamma) \\ &= \frac{2}{3}x_\alpha + \frac{1}{3}(x_\alpha + r_v) \\ &= x_\alpha + \frac{1}{3}r_v. \end{aligned}$$

Dvs. slutfejlen fordeles ligeligt på alle vinkler uanset deres målte størrelser.

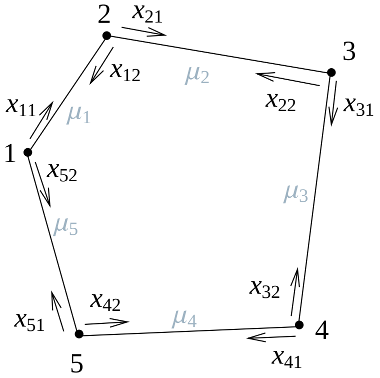
Dobbeltmålinger

Udgangspunktet er $2n$ målinger hvor målingerne to og to måler samme størrelse, altså n forskellige størrelser i alt.



Eks.: siderne i et polygon hvor hver sidelængde måles to gange.

Dobbeltmålinger



$$
\begin{array}{ccccc}
X_{11}\ X_{12} & X_{21}\ X_{22} & \dots & X_{n1}\ X_{n2} \\
\downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \\
x_{11}\ x_{12} & x_{21}\ x_{22} & \dots & x_{n1}\ x_{n2}
\end{array}
$$

Uafhængige målinger af samme kvalitet, dvs ens varians σ^2.

De n forskellige størrelser har sande værdier $\mu_1, \dots, \mu_n$, dvs:

$$\mathbb{E}(X_{11}) = \mathbb{E}(X_{12}) = \mu_1 \quad \dots \quad \mathbb{E}(X_{n1}) = \mathbb{E}(X_{n2}) = \mu_n.$$

Estimat af μ_i

Til at estimere μ_i anvendes $\bar{x}_i = \frac{1}{2}(x_{i1} + x_{i2})$. Dette er således den observerede værdi af $\bar{X}_i = \frac{1}{2}(X_{i1} + X_{i2})$, om hvilken der gælder

$$\mathbb{E}(\bar{X}_i) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{2}(X_{i1} + X_{i2})\right) = \frac{1}{2}(\mathbb{E}(X_{i1}) + \mathbb{E}(X_{i2})) = \mu$$

$$\mathbb{V}(\bar{X}_i) = \mathbb{V}\left(\frac{1}{2}(X_{i1} + X_{i2})\right) = \frac{1}{2^2}(\mathbb{V}(X_{i1}) + \mathbb{V}(X_{i2})) = \frac{\sigma^2}{2}.$$

Estimat af σ^2

Idet X_{i1} og X_{i2} måler samme størrelse μ siger deres differens $Y_i = X_{i1} - X_{i2}$ noget om målekvaliteten.

Da målekvaliteten antages at være ens for alle $2n$ målinger, kan alle n par anvendes til at estimere σ^2.

Estimat af σ^2

Idet X_{i1} og X_{i2} måler samme størrelse μ siger deres differens $Y_i = X_{i1} - X_{i2}$ noget om målekvaliteten.

Da målekvaliteten antages at være ens for alle $2n$ målinger, kan alle n par anvendes til at estimere σ^2.

Vi ved

$$\mathbb{E}(Y_i) = \mathbb{E}(X_{i1}) - \mathbb{E}(X_{i2}) = \mu - \mu = 0$$

$$\mathbb{V}(Y_i) = \mathbb{V}(X_{i1}) + \mathbb{V}(X_{i2}) = \sigma^2 + \sigma^2 = 2\sigma^2.$$

Estimat af σ^2

Idet X_{i1} og X_{i2} måler samme størrelse μ siger deres differens $Y_i = X_{i1} - X_{i2}$ noget om målekvaliteten.

Da målekvaliteten antages at være ens for alle $2n$ målinger, kan alle n par anvendes til at estimere σ^2.

Vi ved

$$\mathbb{E}(Y_i) = \mathbb{E}(X_{i1}) - \mathbb{E}(X_{i2}) = \mu - \mu = 0$$

$$\mathbb{V}(Y_i) = \mathbb{V}(X_{i1}) + \mathbb{V}(X_{i2}) = \sigma^2 + \sigma^2 = 2\sigma^2.$$

Dvs. vi kender den *sande* middelværdi af Y_i, $\mathbb{E}(Y_i) = \mu_{Y_i} = 0$. Derfor er

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu_{Y_i})^2 = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - x_{i2})^2$$

et estimat af σ^2, som er variansen på den enkelte måling.

Approximativt konfidensinterval for σ^2

Idet vi kan estimere σ^2 vha af $\hat{s}^2$ kan vi ligeledes konstruere et konfidensinterval for σ^2.

Vi har ikke gennemgået teorien for et eksakt konfidensinterval, men nedenstående er et approximativt 95%-konfidensinterval for σ,

$$\left[\hat{s} - 1.96\frac{\hat{s}}{\sqrt{2n}}\ ;\ \hat{s} + 1.96\frac{\hat{s}}{\sqrt{2n}}\right].$$