# Landmålingens fejlteori
# Fejlforplantning
# Lektion 8

Torben Tvedebrink - tvede@math.aau.dk
http://www.math.aau.dk/∼tvede/teaching/L4

Institut for Matematiske Fag
Aalborg Universitet

12. maj 2009

# Fejlforplantning

Landmåling involverer ofte bestemmelse af størrelser som ikke kan måles direkte, men kan beregnes ud fra andre målinger:

- Vinkler - vha differenser af retningsmålinger.
- Arealer - vha vinkler og længder.
- Længder - vha trigonometriske relationer.
- ...

I kurset gennemgår vi hvorledes fejlene på de målbare størrelser *forplanter* sig i fejlen af den interessante ikke-målbare størrelse.

# Fejlforplantning

Landmåling involverer ofte bestemmelse af størrelser som ikke kan måles direkte, men kan beregnes ud fra andre målinger:

- Vinkler - vha differenser af retningsmålinger.
- Arealer - vha vinkler og længder.
- Længder - vha trigonometriske relationer.
- ...

I kurset gennemgår vi hvorledes fejlene på de målbare størrelser *forplanter* sig i fejlen af den interessante ikke-målbare størrelse.

Eksempelvis kan arealet, $T$, af en trekant bestemmes ved

$$T = \frac{1}{2} ab \sin C,$$

hvor længdemålingerne $a$ og $b$ samt vinklen $C$ måles med usikkerhed.

# Lineær transformation

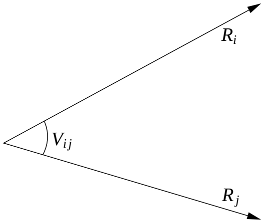
For en lineær funktion (Basis, Lineær Algebra: Linear kombination)

$$Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n$$

med $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X_i, X_j) = 0$ for alle $i$ og $j$, gælder (dvs uafhængige observationer)

$$\mathbb{V}(Y) = a_1^2\mathbb{V}(X_1) + a_2^2\mathbb{V}(X_2) + \cdots + a_n^2\mathbb{V}(X_n)$$

# Eksempel - vinkelberegning




Vinkler bestemmes som differensen mellem to retningsbestemmelser. Fx. er $V_{ij} = R_j - R_i$ hvor både $R_j$ og $R_i$ er uafhængige stokastiske variable.

Vi antager retningerne er målt med samme nøjagtighed, dvs $\mathbb{V}(R_j) = \mathbb{V}(R_i) = \sigma_R^2$. Variansen på $V_{ji}$ er givet ved

$$\sigma_V^2 = \mathbb{V}(V_{ji}) = \mathbb{V}(R_j - R_i) = \mathbb{V}(R_j) + \mathbb{V}(R_i) = 2\sigma_R^2.$$

# Vilkårlig transformation

I lektion 4 så vi hvorledes vi bestemmer $\mathbb{V}(Y)$ når $Y$ er en *vilkårlig* (differentiabel) transformation $g$ af $X_1, \ldots, X_n$, altså

$$
\begin{aligned}
Y &= g(X_1, X_2, \ldots, X_n) \\
&\approx g(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) + \frac{\partial g}{\partial X_1}(X_1 - \mu_1) + \cdots + \frac{\partial g}{\partial X_n}(X_n - \mu_n)
\end{aligned}
$$

# Fejlforplantningensloven

Vi kan approximere variansen på $Y$,

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(Y) &\approx \mathbb{V}\left(g(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) + \frac{\partial g}{\partial X_1}(X_1 - \mu_1) + \cdots + \frac{\partial g}{\partial X_n}(X_n - \mu_n)\right) \\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial X_1}\right)^2 \mathbb{V}(X_1) + \cdots + \left(\frac{\partial g}{\partial X_n}\right)^2 \mathbb{V}(X_n)\end{aligned}$$

# Fejlforplantningensloven

Vi kan approximere variansen på $Y$,

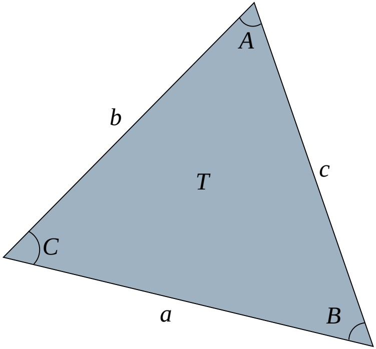
$$\begin{aligned}\mathbb{V}(Y) &\approx \mathbb{V}\left(g(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) + \frac{\partial g}{\partial X_1}(X_1 - \mu_1) + \cdots + \frac{\partial g}{\partial X_n}(X_n - \mu_n)\right) \\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial X_1}\right)^2 \mathbb{V}(X_1) + \cdots + \left(\frac{\partial g}{\partial X_n}\right)^2 \mathbb{V}(X_n)\end{aligned}$$

For $\mathbb{V}(X_1) = \sigma_1^2, \ldots, \mathbb{V}(X_n) = \sigma_n^2$ og $\mathbb{V}(Y) = \sigma_Y^2$ er **fejlforplantningsloven**:

$$\sigma_Y^2 \approx \left(\frac{\partial g}{\partial X_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \cdots + \left(\frac{\partial g}{\partial X_n}\right)^2 \sigma_n^2$$

Bemærk at for $a_1 = \frac{\partial g}{\partial X_1}, \ldots, a_n = \frac{\partial g}{\partial X_n}$ er udtrykket lig variansen af $Y$ for en linear transformation.

# Fejlforplantning ved arealbestemmelse




Arealet $T$ kan bestemmes på flere måder:

$$T = \frac{1}{2}ab\sin C \quad (1)$$

$$T = \frac{1}{2}ac\sin B \quad (2)$$

$$T = \frac{1}{2}bc\sin A \quad (3)$$

# Fejlforplantning anvendt på (1)

Vi analyserer arealudtrykket (1): $T = \frac{1}{2}ab\sin C$.

Jf. fejlforplantningsloven gælder der,

$$\sigma_T^2 \approx \left(\frac{\partial T}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial C}\right)^2 \sigma_C^2$$

# Fejlforplantning anvendt på (1)

Vi analyserer arealudtrykket (1): $T = \frac{1}{2}ab\sin C$.

Jf. fejlforplantningsloven gælder der,

$$\sigma_T^2 \approx \left(\frac{\partial T}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial C}\right)^2 \sigma_C^2$$

De partielt afledte er:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial a} &= \frac{1}{2}b\sin C = \frac{\frac{1}{2}ab\sin C}{a} = \frac{T}{a} \\
\frac{\partial T}{\partial b} &= \frac{1}{2}a\sin C = \frac{\frac{1}{2}ab\sin C}{b} = \frac{T}{b} \\
\frac{\partial T}{\partial C} &= \frac{1}{2}ab\cos C = \frac{1}{2}ab\sin C\frac{\cos C}{\sin C} = T\frac{\cos C}{\sin C} = \frac{T}{\tan C}.
\end{aligned}$$

# Fejlforplantning anvendt på (1)

Vi analyserer arealudtrykket (1): $T = \frac{1}{2}ab\sin C$.

Jf. fejlforplantningsloven gælder der,

$$\sigma_T^2 \approx \left(\frac{\partial T}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial C}\right)^2 \sigma_C^2$$

De partielt afledte er:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial a} &= \frac{1}{2}b\sin C = \frac{\frac{1}{2}ab\sin C}{a} = \frac{T}{a} \\
\frac{\partial T}{\partial b} &= \frac{1}{2}a\sin C = \frac{\frac{1}{2}ab\sin C}{b} = \frac{T}{b} \\
\frac{\partial T}{\partial C} &= \frac{1}{2}ab\cos C = \frac{1}{2}ab\sin C\frac{\cos C}{\sin C} = T\frac{\cos C}{\sin C} = \frac{T}{\tan C}.
\end{aligned}$$

Sidste omskrivning gælder idet

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

# Estimat af $T$

I noternes eksempel 6 er følgende oplysninger givet:

$$\begin{aligned} a &= 115.53\,\mathrm{m}, \quad b = 152.17\mathrm{m} & \sigma_a = \sigma_b = 1\mathrm{cm}. \\ C &= 93.273\,\mathrm{gon} & \sigma_C = 0.002\mathrm{gon}. \end{aligned}$$

Dvs. vi kan regne estimatet for $T$ som

$$T = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} 115.53\mathrm{m} \times 152.17\mathrm{m} \times \sin 93.273 = 8741.072\mathrm{m}^2$$

# Variansen $\sigma_T^2$

Variansen $\sigma_T^2$ på estimatet $T$ er fra forrige slide påvirket af $\sigma_a$, $\sigma_b$ og $\sigma_C$ på følgende måde,

$$\begin{aligned}
\sigma_T^2 &\approx \left(\frac{T}{a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{T}{b}\right)^2 \sigma_b^2 + \left(\frac{T}{\tan C}\right)^2 \sigma_C^2 \\
&= \left(\frac{8741\text{m}^2}{115.53\text{m}}\right)^2 (0.01\text{m})^2 + \left(\frac{8741\text{m}^2}{152.17\text{m}}\right)^2 (0.01\text{m})^2 + \left(\frac{8741\text{m}^2}{\tan 93.273}\right)^2 \left(\frac{0.002\text{gon}}{\omega}\right)^2 \\
&= 0.57\text{m}^4 + 0.33\text{m}^4 + 0.0008\text{m}^4 \\
&= 0.9033\text{m}^4.
\end{aligned}$$

hvor $\omega = \dfrac{200\,\text{gon}}{\pi}$.

$$\sigma_T = \sqrt{\sigma_T^2} = 0.9504\text{m}^2.$$

# Eksempel - Extended edition

Antag nu at målene i trekanten er målt således:

| | $a$ | $b$ | $c$ | $A$ | $B$ | $C$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 115.5603 | 152.1643 | 181.1362 | 43.7505 | 62.9538 | 93.2993 |
| 2 | 115.5397 | 152.1410 | 181.1246 | 43.7485 | 62.9498 | 93.3008 |
| 3 | 115.5527 | 152.1700 | 181.1312 | | 62.9514 | 93.2730 |
| 4 | 115.5350 | | 181.1141 | | 62.9511 | |
| 5 | 115.5341 | | 181.1138 | | | |
| 6 | 115.5431 | | | | | |
| 7 | 115.5519 | | | | | |
| 8 | 115.5300 | | | | | |
| $\bar{x}$ | 115.5434 | 152.1584 | 181.1240 | 43.7495 | 62.9515 | 93.2910 |
| $\mathbb{V}(\bar{X})$ | $\frac{\sigma_a^2}{8}$ | $\frac{\sigma_b^2}{3}$ | $\frac{\sigma_c^2}{5}$ | $\frac{\sigma_A^2}{2}$ | $\frac{\sigma_B^2}{4}$ | $\frac{\sigma_C^2}{3}$ |

# Estimater af arealet $T$

Fra tidligere kan arealet $T$ beregnes på mindst tre måder (1)-(3). Hvis vi anvender gennemsnitsmålingerne fra forrige slide har vi:

$$(1)\ \ T_1 = \frac{1}{2}ab\sin C = 115.5434 \times 152.1584 \times \sin 93.2910 = 8741.681\text{m}^2$$

$$(2)\ \ T_2 = \frac{1}{2}ac\sin B = 115.5434 \times 181.1240 \times \sin 62.9515 = 8741.376\text{m}^2$$

$$(3)\ \ T_3 = \frac{1}{2}bc\sin A = 152.1584 \times 181.1240 \times \sin 43.7495 = 8741.710\text{m}^2$$

# Vægte til estimat af $T$ vha $\bar{x}^*$

Tidligere så vi hvordan $\sigma_T^2$ blev bestemt for (1) med data fra noternes eksempel. Nedenfor bestemmes $\sigma_{T_1}^2$, $\sigma_{T_2}^2$ og $\sigma_{T_3}^2$:

$$\sigma_{T_1}^2 \approx \left(\frac{8741}{115.54}\right)^2 \frac{0.01^2}{8} + \left(\frac{8741}{152.16}\right)^2 \frac{0.01^2}{3} + \left(\frac{8741}{\tan 93.29}\right)^2 \frac{0.002^2}{3\omega^2}$$
$$= 0.1818502\text{m}^4.$$

$$\sigma_{T_2}^2 \approx \left(\frac{8741}{115.54}\right)^2 \frac{0.01^2}{8} + \left(\frac{8741}{181.12}\right)^2 \frac{0.01^2}{5} + \left(\frac{8741}{\tan 62.95}\right)^2 \frac{0.002^2}{4\omega^2}$$
$$= 0.1262968\text{m}^4.$$

$$\sigma_{T_3}^2 \approx \left(\frac{8741}{152.16}\right)^2 \frac{0.01^2}{3} + \left(\frac{8741}{181.12}\right)^2 \frac{0.01^2}{5} + \left(\frac{8741}{\tan 43.75}\right)^2 \frac{0.002^2}{2\omega^2}$$
$$= 0.2126244\text{m}^4.$$

# Vægte til estimat af $T$ vha $\bar{x}^*$

Vægtene i det vægtede gennemsnit $\bar{x}^*$ skal opfylde vægtrelationen,

$$p_1\sigma^2_{T_1} = p_2\sigma^2_{T_2} = p_3\sigma^2_{T_3}.$$

Fx. kan vi vælge $p_1 = 1$, hvilket medfører at

$$p_2 = \frac{\sigma^2_{T_1}}{\sigma^2_{T_2}} = \frac{0.1819}{0.1263} = 1.4399 \quad \text{og} \quad p_3 = \frac{\sigma^2_{T_1}}{\sigma^2_{T_3}} = \frac{0.1819}{0.2126} = 0.8553$$

# Vægte til estimat af $T$ vha $\bar{x}^*$

Vægtene i det vægtede gennemsnit $\bar{x}^*$ skal opfylde vægtrelationen,

$$p_1\sigma^2_{T_1} = p_2\sigma^2_{T_2} = p_3\sigma^2_{T_3}.$$

Fx. kan vi vælge $p_1 = 1$, hvilket medfører at

$$p_2 = \frac{\sigma^2_{T_1}}{\sigma^2_{T_2}} = \frac{0.1819}{0.1263} = 1.4399 \quad \text{og} \quad p_3 = \frac{\sigma^2_{T_1}}{\sigma^2_{T_3}} = \frac{0.1819}{0.2126} = 0.8553$$

Således er $p_+ = 1 + 1.4366 + 0.8553 = 3.2951$ og estimatet af $T$,

$$\begin{aligned}\bar{x}^* &= \frac{p_1}{p_+}T_1 + \frac{p_2}{p_+}T_2 + \frac{p_3}{p_+}T_3 \\ &= \frac{1}{3.2951}8741.681 + \frac{1.4399}{3.2951}8741.376 + \frac{0.8553}{3.2951}8741.710 \\ &= 8741.81\mathrm{m}^2\end{aligned}$$

# Konfidensinterval for $T$

Fra tidligere har vi at

$$\left[\bar{x}^* - 1.96\frac{\sigma_0}{\sqrt{p_+}}\ ;\ \bar{x}^* + 1.96\frac{\sigma_0}{\sqrt{p_+}}\right]$$

Idet vægtrelationen foreskriver $\sigma_0^2 = p_1\sigma_{T_1}^2 = p_2\sigma_{T_2}^2 = p_3\sigma_{T_3}^2$ gælder der i vores tilfælde med $p_1 = 1$ at $\sigma_0^2 = \sigma_{T_1}^2 = 0.1819$.

# Konfidensinterval for $T$

Fra tidligere har vi at

$$\left[\bar{x}^* - 1.96\frac{\sigma_0}{\sqrt{p_+}}\ ;\ \bar{x}^* + 1.96\frac{\sigma_0}{\sqrt{p_+}}\right]$$

Idet vægtrelationen foreskriver $\sigma_0^2 = p_1\sigma_{T_1}^2 = p_2\sigma_{T_2}^2 = p_3\sigma_{T_3}^2$ gælder der i vores tilfælde med $p_1 = 1$ at $\sigma_0^2 = \sigma_{T_1}^2 = 0.1819$.

Med $p_+ = 3.2951$ og $\bar{x}^* = 8741.81\text{m}^2$ bliver konfidensintervallet

$$\left[8741.81 - 1.96\frac{\sqrt{0.1819}}{\sqrt{3.2951}}\ ;\ 8741.81 + 1.96\frac{\sqrt{0.1819}}{\sqrt{3.2951}}\right]$$

$$[8741.35\ ;\ 8742.27]$$

# Kovarians

Vi har indtil nu antaget at vores målinger, $X_1$ og $X_2$, er uafhængige. Dvs at $\mathbb{C}\text{ov}(X_1, X_2) = 0$.

Lader vi nu $X_1$ og $X_2$ være afhængige, dvs ændringer i de to variable kan påvirke hinanden.

# Kovarians

Vi har indtil nu antaget at vores målinger, $X_1$ og $X_2$, er uafhængige. Dvs at $\mathbb{C}\text{ov}(X_1, X_2) = 0$.

Lader vi nu $X_1$ og $X_2$ være afhængige, dvs ændringer i de to variable kan påvirke hinanden.

Dette betyder at $\mathbb{V}(X_1 + X_2)$ bliver mere kompliceret. Lad $\mathbb{E}(X_1) = \mu_1$ og $\mathbb{V}(X_1) = \sigma_1^2$ og tilsvarende for $X_2$:

$$\mathbb{V}(X_1 + X_2) \quad = \quad \mathbb{E}\left([(X_1 + X_2) - (\mu_1 - \mu_2)]^2\right)$$

# Kovarians

Vi har indtil nu antaget at vores målinger, $X_1$ og $X_2$, er uafhængige. Dvs at $\mathbb{C}\text{ov}(X_1, X_2) = 0$.

Lader vi nu $X_1$ og $X_2$ være afhængige, dvs ændringer i de to variable kan påvirke hinanden.

Dette betyder at $\mathbb{V}(X_1 + X_2)$ bliver mere kompliceret. Lad $\mathbb{E}(X_1) = \mu_1$ og $\mathbb{V}(X_1) = \sigma_1^2$ og tilsvarende for $X_2$:

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X_1 + X_2) &= \mathbb{E}\left([(X_1 + X_2) - (\mu_1 - \mu_2)]^2\right) \\ &= \mathbb{E}\left([(X_1 - \mu_1) - (X_2 - \mu_2)]^2\right)\end{aligned}$$

# Kovarians

Vi har indtil nu antaget at vores målinger, $X_1$ og $X_2$, er uafhængige. Dvs at $\mathbb{C}\text{ov}(X_1, X_2) = 0$.

Lader vi nu $X_1$ og $X_2$ være afhængige, dvs ændringer i de to variable kan påvirke hinanden.

Dette betyder at $\mathbb{V}(X_1 + X_2)$ bliver mere kompliceret. Lad $\mathbb{E}(X_1) = \mu_1$ og $\mathbb{V}(X_1) = \sigma_1^2$ og tilsvarende for $X_2$:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}(X_1 + X_2) &= \mathbb{E}\left([(X_1 + X_2) - (\mu_1 - \mu_2)]^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left([(X_1 - \mu_1) - (X_2 - \mu_2)]^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left((X_1 - \mu_1)^2 + (X_2 - \mu_2)^2 + 2(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)\right)
\end{aligned}
$$

# Kovarians

Vi har indtil nu antaget at vores målinger, $X_1$ og $X_2$, er uafhængige. Dvs at $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X_1, X_2) = 0$.

Lader vi nu $X_1$ og $X_2$ være afhængige, dvs ændringer i de to variable kan påvirke hinanden.

Dette betyder at $\mathbb{V}(X_1 + X_2)$ bliver mere kompliceret. Lad $\mathbb{E}(X_1) = \mu_1$ og $\mathbb{V}(X_1) = \sigma_1^2$ og tilsvarende for $X_2$:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}(X_1 + X_2) &= \mathbb{E}\left([(X_1 + X_2) - (\mu_1 - \mu_2)]^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left([(X_1 - \mu_1) - (X_2 - \mu_2)]^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left((X_1 - \mu_1)^2 + (X_2 - \mu_2)^2 + 2(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)\right) \\
&= \mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(X) + 2\mathbb{C}\mathrm{ov}(X_1, X_2)
\end{aligned}
$$

# Kovarians

Vi har indtil nu antaget at vores målinger, $X_1$ og $X_2$, er uafhængige. Dvs at $\mathbb{C}\text{ov}(X_1, X_2) = 0$.

Lader vi nu $X_1$ og $X_2$ være afhængige, dvs ændringer i de to variable kan påvirke hinanden.

Dette betyder at $\mathbb{V}(X_1 + X_2)$ bliver mere kompliceret. Lad $\mathbb{E}(X_1) = \mu_1$ og $\mathbb{V}(X_1) = \sigma_1^2$ og tilsvarende for $X_2$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X_1 + X_2) &= \mathbb{E}\left([(X_1 + X_2) - (\mu_1 - \mu_2)]^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left([(X_1 - \mu_1) - (X_2 - \mu_2)]^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left((X_1 - \mu_1)^2 + (X_2 - \mu_2)^2 + 2(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)\right) \\
&= \mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(X) + 2\mathbb{C}\text{ov}(X_1, X_2) \\
&= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_{12}
\end{aligned}$$

hvor $\sigma_{12}$ er kovariansen mellem $X_1$ og $X_2$.

# Fejlforplantning

Tidligere har vi set $Y = g(X_1, X_2)$ hvor $g$ er en transformation af $X_1$ og $X_2$.

# Fejlforplantning

Tidligere har vi set $Y = g(X_1, X_2)$ hvor $g$ er en transformation af $X_1$ og $X_2$.

En lineær approximation af $Y$ omkring $\mu_1$ og $\mu_2$ er givet ved:

$$Y = g(X_1, X_2) \approx g(\mu_1, \mu_2) + \frac{\partial g}{\partial X_1}(X_1 - \mu_1) + \frac{\partial g}{\partial X_2}(X_2 - \mu_2)$$

# Fejlforplantning - fortsat

Hvis $\mathbb{C}\text{ov}(X_1, X_2) = \sigma_{12} \neq 0$ bliver variansen af $Y$:

$$\mathbb{V}(Y) \approx \mathbb{V}\left(g(\mu_1, \mu_2) + \frac{\partial g}{\partial X_1}(X_1 - \mu_1) + \frac{\partial g}{\partial X_2}(X_2 - \mu_2)\right)$$

# Fejlforplantning - fortsat

Hvis $\mathbb{C}\text{ov}(X_1, X_2) = \sigma_{12} \neq 0$ bliver variansen af $Y$:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(Y) &\approx \mathbb{V}\left(g(\mu_1, \mu_2) + \frac{\partial g}{\partial X_1}(X_1 - \mu_1) + \frac{\partial g}{\partial X_2}(X_2 - \mu_2)\right) \\ &= \mathbb{V}\left(\frac{\partial g}{\partial X_1}X_1 + \frac{\partial g}{\partial X_2}X_2\right) \end{aligned}$$

# Fejlforplantning - fortsat

Hvis $\mathbb{C}\text{ov}(X_1, X_2) = \sigma_{12} \neq 0$ bliver variansen af $Y$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(Y) &\approx \mathbb{V}\left(g(\mu_1, \mu_2) + \frac{\partial g}{\partial X_1}(X_1 - \mu_1) + \frac{\partial g}{\partial X_2}(X_2 - \mu_2)\right) \\
&= \mathbb{V}\left(\frac{\partial g}{\partial X_1}X_1 + \frac{\partial g}{\partial X_2}X_2\right) \\
&= \left(\frac{\partial g}{\partial X_1}\right)^2 \mathbb{V}(X_1) + \left(\frac{\partial g}{\partial X_2}\right)^2 \mathbb{V}(X_2) + 2\mathbb{C}\text{ov}\left(\frac{\partial g}{\partial X_2}X_1, \frac{\partial g}{\partial X_2}X_2\right)
\end{aligned}$$

# Fejlforplantning - fortsat

Hvis $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X_1, X_2) = \sigma_{12} \neq 0$ bliver variansen af $Y$:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}(Y) &\approx \mathbb{V}\left( g(\mu_1, \mu_2) + \frac{\partial g}{\partial X_1}(X_1 - \mu_1) + \frac{\partial g}{\partial X_2}(X_2 - \mu_2) \right) \\
&= \mathbb{V}\left( \frac{\partial g}{\partial X_1} X_1 + \frac{\partial g}{\partial X_2} X_2 \right) \\
&= \left( \frac{\partial g}{\partial X_1} \right)^2 \mathbb{V}(X_1) + \left( \frac{\partial g}{\partial X_2} \right)^2 \mathbb{V}(X_2) + 2\mathbb{C}\mathrm{ov}\left( \frac{\partial g}{\partial X_2} X_1, \frac{\partial g}{\partial X_2} X_2 \right) \\
&= \left( \frac{\partial g}{\partial X_1} \right)^2 \sigma_1^2 + \left( \frac{\partial g}{\partial X_2} \right)^2 \sigma_2^2 + 2 \frac{\partial g}{\partial X_1} \frac{\partial g}{\partial X_2} \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_1, X_2)
\end{aligned}
$$

# Fejlforplantning - fortsat

Hvis $\mathbb{C}\text{ov}(X_1, X_2) = \sigma_{12} \neq 0$ bliver variansen af $Y$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(Y) &\approx \mathbb{V}\left(g(\mu_1,\mu_2) + \frac{\partial g}{\partial X_1}(X_1 - \mu_1) + \frac{\partial g}{\partial X_2}(X_2 - \mu_2)\right) \\
&= \mathbb{V}\left(\frac{\partial g}{\partial X_1}X_1 + \frac{\partial g}{\partial X_2}X_2\right) \\
&= \left(\frac{\partial g}{\partial X_1}\right)^2 \mathbb{V}(X_1) + \left(\frac{\partial g}{\partial X_2}\right)^2 \mathbb{V}(X_2) + 2\mathbb{C}\text{ov}\left(\frac{\partial g}{\partial X_2}X_1, \frac{\partial g}{\partial X_2}X_2\right) \\
&= \left(\frac{\partial g}{\partial X_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial X_2}\right)^2 \sigma_2^2 + 2\frac{\partial g}{\partial X_1}\frac{\partial g}{\partial X_2}\mathbb{C}\text{ov}(X_1, X_2) \\
&= \left(\frac{\partial g}{\partial X_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial X_2}\right)^2 \sigma_2^2 + 2\frac{\partial g}{\partial X_1}\frac{\partial g}{\partial X_2}\sigma_{12}
\end{aligned}$$

# Fejlforplantning - matricer

Udtrykket for variansen af $Y$ kan opskrives vha. matricer:

$$\mathbb{V}(Y) \approx \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial X_1} & \frac{\partial g}{\partial X_2} \end{bmatrix}}_{G} \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}}_{K_X} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial X_1} \\ \frac{\partial g}{\partial X_2} \end{bmatrix}}_{G^\top}$$

hvor $K_x$ kaldes kovariansmatricen for $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ og $G$ er Jacobi-matricen.

Bemærk: $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X_1, X_2) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_2, X_1)$ hvilket vil sige $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ og $K_X$ er derfor symmetrisk.

# Udregning af udtrykket

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(Y) &\approx \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial X_1} & \frac{\partial g}{\partial X_2} \end{bmatrix}}_{1\times 2} \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}}_{2\times 2} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial X_1} \\ \frac{\partial g}{\partial X_2} \end{bmatrix}}_{2\times 1} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial X_1} & \frac{\partial g}{\partial X_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * \\ * \end{bmatrix}\end{aligned}$$

# Udregning af udtrykket

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(Y) &\approx \underbrace{\begin{bmatrix}\frac{\partial g}{\partial X_1} & \frac{\partial g}{\partial X_2}\end{bmatrix}}_{1\times 2}\underbrace{\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_{12}\\ \sigma_{21} & \sigma_2^2\end{bmatrix}}_{2\times 2}\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{\partial g}{\partial X_1}\\ \frac{\partial g}{\partial X_2}\end{bmatrix}}_{2\times 1}\\ &= \begin{bmatrix}\frac{\partial g}{\partial X_1} & \frac{\partial g}{\partial X_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial g}{\partial X_1}\sigma_1^2 + \frac{\partial g}{\partial X_2}\sigma_{12}\\ *\end{bmatrix}\end{aligned}$$

# Udregning af udtrykket

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}(Y) &\approx \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial X_1} & \frac{\partial g}{\partial X_2} \end{bmatrix}}_{1\times 2} \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}}_{2\times 2} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial X_1} \\ \frac{\partial g}{\partial X_2} \end{bmatrix}}_{2\times 1} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial X_1} & \frac{\partial g}{\partial X_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial X_1}\sigma_1^2 + \frac{\partial g}{\partial X_2}\sigma_{12} \\ \frac{\partial g}{\partial X_1}\sigma_{21} + \frac{\partial g}{\partial X_2}\sigma_{12} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

# Udregning af udtrykket

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}(Y) &\approx \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial X_1} & \frac{\partial g}{\partial X_2} \end{bmatrix}}_{1\times 2} \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}}_{2\times 2} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial X_1} \\ \frac{\partial g}{\partial X_2} \end{bmatrix}}_{2\times 1} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial X_1} & \frac{\partial g}{\partial X_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial X_1}\sigma_1^2 + \frac{\partial g}{\partial X_2}\sigma_{12} \\ \frac{\partial g}{\partial X_1}\sigma_{21} + \frac{\partial g}{\partial X_2}\sigma_{12} \end{bmatrix} \\
&= * + *
\end{aligned}
$$

# Udregning af udtrykket

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}(Y) &\approx \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial X_1} & \frac{\partial g}{\partial X_2} \end{bmatrix}}_{1\times 2} \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}}_{2\times 2} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial X_1} \\ \frac{\partial g}{\partial X_2} \end{bmatrix}}_{2\times 1} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial X_1} & \frac{\partial g}{\partial X_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial X_1}\sigma_1^2 + \frac{\partial g}{\partial X_2}\sigma_{12} \\ \frac{\partial g}{\partial X_1}\sigma_{21} + \frac{\partial g}{\partial X_2}\sigma_{12} \end{bmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial g}{\partial X_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \frac{\partial g}{\partial X_1}\frac{\partial g}{\partial X_2}\sigma_{12} + *
\end{aligned}
$$

# Udregning af udtrykket

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(Y) &\approx \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial X_1} & \frac{\partial g}{\partial X_2} \end{bmatrix}}_{1\times 2} \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}}_{2\times 2} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial X_1} \\ \frac{\partial g}{\partial X_2} \end{bmatrix}}_{2\times 1} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial X_1} & \frac{\partial g}{\partial X_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial X_1}\sigma_1^2 + \frac{\partial g}{\partial X_2}\sigma_{12} \\ \frac{\partial g}{\partial X_1}\sigma_{21} + \frac{\partial g}{\partial X_2}\sigma_{12} \end{bmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial g}{\partial X_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \frac{\partial g}{\partial X_1}\frac{\partial g}{\partial X_2}\sigma_{12} + \frac{\partial g}{\partial X_1}\frac{\partial g}{\partial X_2}\sigma_{21} + \left(\frac{\partial g}{\partial X_2}\right)^2 \sigma_2^2
\end{aligned}$$

# Udregning af udtrykket

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}(Y) &\approx \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial X_1} & \frac{\partial g}{\partial X_2} \end{bmatrix}}_{1\times 2} \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}}_{2\times 2} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial X_1} \\ \frac{\partial g}{\partial X_2} \end{bmatrix}}_{2\times 1} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial X_1} & \frac{\partial g}{\partial X_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial X_1}\sigma_1^2 + \frac{\partial g}{\partial X_2}\sigma_{12} \\ \frac{\partial g}{\partial X_1}\sigma_{21} + \frac{\partial g}{\partial X_2}\sigma_{12} \end{bmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial g}{\partial X_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \frac{\partial g}{\partial X_1}\frac{\partial g}{\partial X_2}\sigma_{12} + \frac{\partial g}{\partial X_1}\frac{\partial g}{\partial X_2}\sigma_{21} + \left(\frac{\partial g}{\partial X_2}\right)^2 \sigma_2^2 \\
&= \left(\frac{\partial g}{\partial X_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial X_2}\right)^2 \sigma_2^2 + 2\frac{\partial g}{\partial X_1}\frac{\partial g}{\partial X_2}\sigma_{12}
\end{aligned}
$$