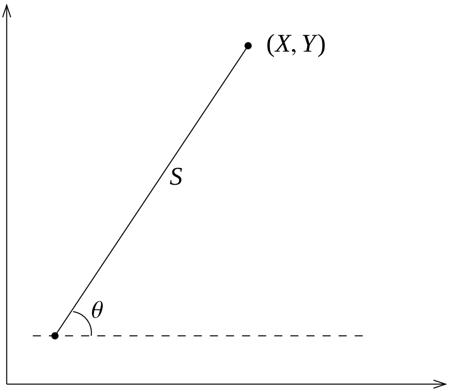
Landmålingens fejlteori
Den generelle fejlforplantningslov
Lektion 9

Torben Tvedebrink - tvede@math.aau.dk
http://www.math.aau.dk/∼tvede/teaching/L4

Institut for Matematiske Fag
Aalborg Universitet

18. maj 2009

Polære koordinater



I landmåling forekommer ligeledes polære målinger hvor de rektangulære målinger fremkommer ved følgende sammenhænge,

$$X = S\cos\theta \qquad Y = S\sin\theta$$

Polære koordinater

Vi ser at både X og Y er transformationer af de samme stokastiske variable S og θ.

Det medfører at de *ikke* er indbyrdes uafhængige og derfor $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y) \neq 0$.

Vi siger også at X og Y er korrelerede.

Polære koordinater

Vi ser at både X og Y er transformationer af de samme stokastiske variable S og θ.

Det medfører at de *ikke* er indbyrdes uafhængige og derfor $\mathbb{C}\text{ov}(X, Y) \neq 0$.

Vi siger også at X og Y er korrelerede.

Vi kan omregne mellem polære målinger og rektangulære målinger vha:

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{S^2(cos^2\theta + \sin^2\theta)} = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

Polære koordinater

Vi ser at både X og Y er transformationer af de samme stokastiske variable S og θ.

Det medfører at de *ikke* er indbyrdes uafhængige og derfor $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y) \neq 0$.

Vi siger også at X og Y er korrelerede.

Vi kan omregne mellem polære målinger og rektangulære målinger vha:

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{S^2} = \sqrt{S^2(cos^2\theta + \sin^2\theta)} = \sqrt{X^2 + Y^2} \\ \theta &= \tan^{-1}(\tan\theta) = \tan^{-1}\left(\frac{S\sin\theta}{S\cos\theta}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right) \end{aligned}$$

Variansen af afhængige variable

Tidligere har vi set for uafhængige variable at

$$\mathbb{V}(a_1X_1 + \cdots + a_nX_n) = a_1^2\mathbb{V}(X_1) + \cdots + a_n^2\mathbb{V}(X_n) = a_1^2\sigma_1^2 + \cdots + a_n^2\sigma_n^2$$

Variansen af afhængige variable

Når to variable X_i og X_j er afhængige er kovariansen $\mathbb{C}\text{ov}(X_i, X_j) = \sigma_{ij}$ forskellig fra nul. Vi kan generalisere udtrykket ovenfor

$$\mathbb{V}(a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n) = a_1^2\sigma_1^2 + \cdots + a_n^2\sigma_n^2 + 2\sum_{i<j} a_i a_j \sigma_{ij},$$

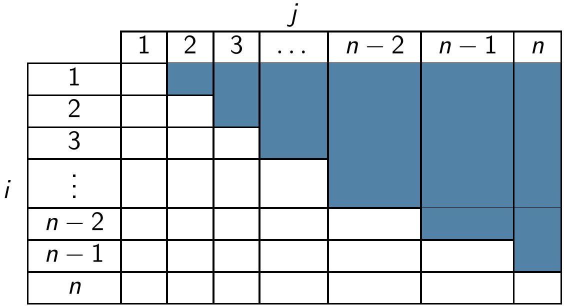
hvor $\sum_{i<j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}$ betyder at vi lader i gennemløbe alle index $1, \ldots, n$ og j skal hver gang være større end i.

Variansen af afhængige variable

Når to variable X_i og X_j er afhængige er kovariansen $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X_i, X_j) = \sigma_{ij}$ forskellig fra nul. Vi kan generalisere udtrykket ovenfor

$$\mathbb{V}(a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n) = a_1^2 \sigma_1^2 + \cdots + a_n^2 \sigma_n^2 + 2 \sum_{i<j} a_i a_j \sigma_{ij},$$

hvor $\sum_{i<j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n}$ betyder at vi lader i gennemløbe alle index $1, \ldots, n$ og j skal hver gang være større end i.



Vilkårlig transformation

Er transformationen af $Y = g(X_1, \ldots, X_n)$ en vilkårlig differentiabel funktion laver vi som tidligere en lineær approximation af g omkring middelværdierne af X_i'erne $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$,

$$Y = g(X_1, \ldots, X_n)$$

Vilkårlig transformation

Er transformationen af $Y = g(X_1, \ldots, X_n)$ en vilkårlig differentiabel funktion laver vi som tidligere en lineær approximation af g omkring middelværdierne af X_i'erne $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$,

$$\begin{aligned} Y &= g(X_1, \ldots, X_n) \\ &\approx g(\mu_1, \ldots, \mu_n) + \frac{\partial g}{\partial X_1}(X_1 - \mu_1) + \cdots + \frac{\partial g}{\partial X_n}(X_n - \mu_n) \end{aligned}$$

Vilkårlig transformation

Er transformationen af $Y = g(X_1, \dots, X_n)$ en vilkårlig differentiabel funktion laver vi som tidligere en lineær approximation af g omkring middelværdierne af X_i'erne $(\mu_1, \dots, \mu_n)$,

$$\begin{aligned}
Y &= g(X_1, \dots, X_n) \\
&\approx g(\mu_1, \dots, \mu_n) + \frac{\partial g}{\partial X_1}(X_1 - \mu_1) + \cdots + \frac{\partial g}{\partial X_n}(X_n - \mu_n) \\
&= \underbrace{\frac{\partial g}{\partial X_1} X_1 + \cdots + \frac{\partial g}{\partial X_n} X_n}_{\text{Stokastisk}} + \underbrace{g(\mu_1, \dots, \mu_n) - \frac{\partial g}{\partial X_1}\mu_1 - \cdots - \frac{\partial g}{\partial X_n}\mu_n}_{\text{Konstant}}
\end{aligned}$$

Vilkårlig transformation

Er transformationen af $Y = g(X_1, \ldots, X_n)$ en vilkårlig differentiabel funktion laver vi som tidligere en lineær approximation af g omkring middelværdierne af X_i'erne $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$,

$$\begin{aligned} Y &= g(X_1, \ldots, X_n) \\ &\approx g(\mu_1, \ldots, \mu_n) + \frac{\partial g}{\partial X_1}(X_1 - \mu_1) + \cdots + \frac{\partial g}{\partial X_n}(X_n - \mu_n) \\ &= \underbrace{\frac{\partial g}{\partial X_1} X_1 + \cdots + \frac{\partial g}{\partial X_n} X_n}_{\text{Stokastisk}} + \underbrace{g(\mu_1, \ldots, \mu_n) - \frac{\partial g}{\partial X_1}\mu_1 - \cdots - \frac{\partial g}{\partial X_n}\mu_n}_{\text{Konstant}} \end{aligned}$$

Variansen, σ_Y^2, af Y er således

$$\mathbb{V}(Y) = \sigma_Y^2 \approx \left(\frac{\partial g}{\partial X_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \cdots + \left(\frac{\partial g}{\partial X_n}\right)^2 \sigma_n^2 + 2 \sum_{i<j} \frac{\partial g}{\partial X_i} \frac{\partial g}{\partial X_j} \sigma_{ij}$$

Eksempel

Lad X_1 og X_2 være stokatiske variable med fordelinger hhv. (μ_1, σ_1^2) og (μ_2, σ_2^2), hvor $\mathbb{C}\text{ov}(X_1, X_2) = \sigma_{12} \neq 0$.

Vi ønsker at bestemme variansen af

$$Y = \frac{X_1}{X_2}.$$

Eksempel

Lad X_1 og X_2 være stokatiske variable med fordelinger hhv. (μ_1, σ_1^2) og (μ_2, σ_2^2), hvor $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X_1, X_2) = \sigma_{12} \neq 0$.

Vi ønsker at bestemme variansen af

$$Y = \frac{X_1}{X_2}.$$

Dvs vi skal bestemme de partielt afledte af Y mht X_1 og X_2,

$$\frac{\partial Y}{\partial X_1} = \frac{1}{X_2} \qquad \frac{\partial Y}{\partial X_2} = \frac{0 \times X_2 - X_1 \times 1}{(X_2)^2} = -\frac{X_1}{X_2^2}$$

Eksempel

Lad X_1 og X_2 være stokatiske variable med fordelinger hhv. (μ_1, σ_1^2) og (μ_2, σ_2^2), hvor $\mathbb{C}\text{ov}(X_1, X_2) = \sigma_{12} \neq 0$.

Vi ønsker at bestemme variansen af

$$Y = \frac{X_1}{X_2}.$$

Dvs vi skal bestemme de partielt afledte af Y mht X_1 og X_2,

$$\frac{\partial Y}{\partial X_1} = \frac{1}{X_2} \qquad \frac{\partial Y}{\partial X_2} = \frac{0 \times X_2 - X_1 \times 1}{(X_2)^2} = -\frac{X_1}{X_2^2}$$

Indsættes udtrykkene (evalueret i deres middelværdier) nu i formlen for σ_Y^2 får vi

$$\sigma_Y^2 \approx \left(\frac{1}{\mu_2}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(-\frac{\mu_1}{\mu_2^2}\right)^2 \sigma_2^2 + 2\left(\frac{1}{\mu_2}\right)\left(-\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\sigma_{12}$$

Eksempel

Lad X_1 og X_2 være stokatiske variable med fordelinger hhv. (μ_1, σ_1^2) og (μ_2, σ_2^2), hvor $\mathbb{C}\text{ov}(X_1, X_2) = \sigma_{12} \neq 0$.

Vi ønsker at bestemme variansen af

$$Y = \frac{X_1}{X_2}.$$

Dvs vi skal bestemme de partielt afledte af Y mht X_1 og X_2,

$$\frac{\partial Y}{\partial X_1} = \frac{1}{X_2} \qquad \frac{\partial Y}{\partial X_2} = \frac{0 \times X_2 - X_1 \times 1}{(X_2)^2} = -\frac{X_1}{X_2^2}$$

Indsættes udtrykkene (evalueret i deres middelværdier) nu i formlen for σ_Y^2 får vi

$$\begin{aligned}
\sigma_Y^2 &\approx \left(\frac{1}{\mu_2}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(-\frac{\mu_1}{\mu_2^2}\right)^2 \sigma_2^2 + 2\left(\frac{1}{\mu_2}\right)\left(-\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\sigma_{12} \\
&= \left(\frac{\sigma_1}{\mu_2}\right)^2 + \left(\frac{\mu_1 \sigma_2}{\mu_2^2}\right)^2 - 2\frac{\mu_1}{\mu_2^2}\sigma_{12}
\end{aligned}$$

Kovarians af Y_1 og Y_2

Vi startede med at kigge på polære målinger, dvs

$$X = S\cos\theta \quad \text{og} \quad Y = S\sin\theta.$$

Kovarians af Y_1 og Y_2

Vi startede med at kigge på polære målinger, dvs

$$X = S\cos\theta \quad \text{og} \quad Y = S\sin\theta.$$

Altså har vi 2 stokastiske variable $Y_1 = g_1(X_1, X_2)$ og $Y_2 = g_2(X_1, X_2)$ og ønsker at udtale os om både $\mathbb{V}(Y_1)$ og $\mathbb{V}(Y_2)$ samt $\mathbb{C}\text{ov}(Y_1, Y_2)$.

Kovarians af Y_1 og Y_2

Vi startede med at kigge på polære målinger, dvs

$$X = S\cos\theta \quad \text{og} \quad Y = S\sin\theta.$$

Altså har vi 2 stokastiske variable $Y_1 = g_1(X_1, X_2)$ og $Y_2 = g_2(X_1, X_2)$ og ønsker at udtale os om både $\mathbb{V}(Y_1)$ og $\mathbb{V}(Y_2)$ samt $\mathbb{C}\text{ov}(Y_1, Y_2)$.

Først betragter vi situationen hvor funktionerne g_1 og g_2 er lineære, dvs

$$\begin{aligned} Y_1 &= g_1(X_1, X_2) = aX_1 + bX_2 \\ Y_2 &= g_2(X_1, X_2) = cX_1 + dX_2 \end{aligned}$$

Eksempel

Lad X_1 og X_2 have varianser σ_1^2 og σ_2^2 samt afhængige med kovarians σ_{12}.

Vi har således:

$$\begin{aligned} Y_1 &= aX_1 + bX_2 \\ Y_2 &= cX_1 + dX_2 \\ Y_1 + Y_2 &= (a+c)X_1 + (b+d)X_2. \end{aligned}$$

Eksempel

Lad X_1 og X_2 have varianser σ_1^2 og σ_2^2 samt afhængige med kovarians σ_{12}.

Vi har således:

$$\begin{aligned} Y_1 &= aX_1 + bX_2 \\ Y_2 &= cX_1 + dX_2 \\ Y_1 + Y_2 &= (a+c)X_1 + (b+d)X_2. \end{aligned}$$

Vi kan beregne varianserne vha:

$$\mathbb{V}(Y_1) = a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2 + 2ab\sigma_{12}$$

Eksempel

Lad X_1 og X_2 have varianser σ_1^2 og σ_2^2 samt afhængige med kovarians σ_{12}.

Vi har således:

$$\begin{aligned} Y_1 &= aX_1 + bX_2 \\ Y_2 &= cX_1 + dX_2 \\ Y_1 + Y_2 &= (a+c)X_1 + (b+d)X_2. \end{aligned}$$

Vi kan beregne varianserne vha:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(Y_1) &= a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2 + 2ab\sigma_{12} \\ \mathbb{V}(Y_2) &= c^2\sigma_1^2 + d^2\sigma_2^2 + 2cd\sigma_{12} \end{aligned}$$

Eksempel

Lad X_1 og X_2 have varianser σ_1^2 og σ_2^2 samt afhængige med kovarians σ_{12}.

Vi har således:

$$\begin{aligned} Y_1 &= aX_1 + bX_2 \\ Y_2 &= cX_1 + dX_2 \\ Y_1 + Y_2 &= (a+c)X_1 + (b+d)X_2. \end{aligned}$$

Vi kan beregne varianserne vha:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(Y_1) &= a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2 + 2ab\sigma_{12} \\ \mathbb{V}(Y_2) &= c^2\sigma_1^2 + d^2\sigma_2^2 + 2cd\sigma_{12} \\ \mathbb{V}(Y_1 + Y_2) &= (a+c)^2\sigma_1^2 + (b+d)^2\sigma_2^2 + 2(a+c)(b+d)\sigma_{12} \end{aligned}$$

Eksempel - fortsat

Fra tidligere har vi at $\mathbb{V}(Y_1 + Y_2) = \mathbb{V}(Y_1) + \mathbb{V}(Y_2) + 2\mathbb{C}\text{ov}(Y_1, Y_2)$, hvilket er ensbetydende med,

$$2\mathbb{C}\text{ov}(Y_1, Y_2) = \mathbb{V}(Y_1 + Y_2) - \mathbb{V}(Y_1) - \mathbb{V}(Y_2)$$

Eksempel - fortsat

Fra tidligere har vi at $\mathbb{V}(Y_1 + Y_2) = \mathbb{V}(Y_1) + \mathbb{V}(Y_2) + 2\mathbb{C}\text{ov}(Y_1, Y_2)$, hvilket er ensbetydende med,

$$2\mathbb{C}\text{ov}(Y_1, Y_2) = \mathbb{V}(Y_1 + Y_2) - \mathbb{V}(Y_1) - \mathbb{V}(Y_2)$$

Indsættes nu udtrykkene for varianserne af $Y_1 + Y_2$, Y_1 og Y_2 får vi,

$$\begin{aligned} 2\mathbb{C}\text{ov}(Y_1,Y_2) &= (a+c)^2\sigma_1^2 + (b+d)^2\sigma_2^2 + 2(a+c)(b+d)\sigma_{12} \\ &\quad -(a^2\sigma_1^2+b^2\sigma_2^2+2ab\sigma_{12}) - (c^2\sigma_1^2+d^2\sigma_2^2+2cd\sigma_{12}) \end{aligned}$$

Eksempel - fortsat

Fra tidligere har vi at $\mathbb{V}(Y_1 + Y_2) = \mathbb{V}(Y_1) + \mathbb{V}(Y_2) + 2\mathbb{C}\text{ov}(Y_1, Y_2)$, hvilket er ensbetydende med,

$$2\mathbb{C}\text{ov}(Y_1, Y_2) = \mathbb{V}(Y_1 + Y_2) - \mathbb{V}(Y_1) - \mathbb{V}(Y_2)$$

Indsættes nu udtrykkene for varianserne af $Y_1 + Y_2$, Y_1 og Y_2 får vi,

$$\begin{aligned}
2\mathbb{C}\text{ov}(Y_1,Y_2) &= (a+c)^2\sigma_1^2 + (b+d)^2\sigma_2^2 + 2(a+c)(b+d)\sigma_{12} \\
&\quad -(a^2\sigma_1^2+b^2\sigma_2^2+2ab\sigma_{12}) - (c^2\sigma_1^2+d^2\sigma_2^2+2cd\sigma_{12}) \\
&= (a^2+c^2)\sigma_1^2 + 2ac\sigma_1^2 + (b^2+d^2)\sigma_2^2 + 2bd\sigma_2^2 + 2(ab+ad+cb+cd)\sigma_{12} \\
&\quad -(a^2+c^2)\sigma_1^2 - (b^2+d^2)\sigma_2^2 - 2(ab+cd)\sigma_{12}
\end{aligned}$$

Eksempel - fortsat

Fra tidligere har vi at $\mathbb{V}(Y_1 + Y_2) = \mathbb{V}(Y_1) + \mathbb{V}(Y_2) + 2\mathbb{C}\text{ov}(Y_1, Y_2)$, hvilket er ensbetydende med,

$$2\mathbb{C}\text{ov}(Y_1, Y_2) = \mathbb{V}(Y_1 + Y_2) - \mathbb{V}(Y_1) - \mathbb{V}(Y_2)$$

Indsættes nu udtrykkene for varianserne af $Y_1 + Y_2$, Y_1 og Y_2 får vi,

$$\begin{aligned} 2\mathbb{C}\text{ov}(Y_1,Y_2) &= (a+c)^2\sigma_1^2 + (b+d)^2\sigma_2^2 + 2(a+c)(b+d)\sigma_{12} \\ &\quad -(a^2\sigma_1^2+b^2\sigma_2^2+2ab\sigma_{12}) - (c^2\sigma_1^2+d^2\sigma_2^2+2cd\sigma_{12}) \\ &= (a^2+c^2)\sigma_1^2 + 2ac\sigma_1^2 + (b^2+d^2)\sigma_2^2 + 2bd\sigma_2^2 + 2(ab+ad+cb+cd)\sigma_{12} \\ &\quad -(a^2+c^2)\sigma_1^2 - (b^2+d^2)\sigma_2^2 - 2(ab+cd)\sigma_{12} \\ &= \quad 2ac\sigma_1^2 + 2bd\sigma_2^2 + 2(ad+cb)\sigma_{12} \end{aligned}$$

Eksempel - fortsat

Fra tidligere har vi at $\mathbb{V}(Y_1 + Y_2) = \mathbb{V}(Y_1) + \mathbb{V}(Y_2) + 2\mathbb{C}\mathrm{ov}(Y_1, Y_2)$, hvilket er ensbetydende med,

$$2\mathbb{C}\mathrm{ov}(Y_1, Y_2) = \mathbb{V}(Y_1 + Y_2) - \mathbb{V}(Y_1) - \mathbb{V}(Y_2)$$

Indsættes nu udtrykkene for varianserne af $Y_1 + Y_2$, Y_1 og Y_2 får vi,

$$\begin{aligned}
2\mathbb{C}\mathrm{ov}(Y_1,Y_2) &= (a+c)^2\sigma_1^2 + (b+d)^2\sigma_2^2 + 2(a+c)(b+d)\sigma_{12} \\
&\quad -(a^2\sigma_1^2+b^2\sigma_2^2+2ab\sigma_{12}) - (c^2\sigma_1^2+d^2\sigma_2^2+2cd\sigma_{12}) \\
&= (a^2+c^2)\sigma_1^2 + 2ac\sigma_1^2 + (b^2+d^2)\sigma_2^2 + 2bd\sigma_2^2 + 2(ab+ad+cb+cd)\sigma_{12} \\
&\quad -(a^2+c^2)\sigma_1^2 - (b^2+d^2)\sigma_2^2 - 2(ab+cd)\sigma_{12} \\
&= 2ac\sigma_1^2 + 2bd\sigma_2^2 + 2(ad+cb)\sigma_{12}
\end{aligned}$$

Dvs

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(Y_1, Y_2) = ac\sigma_1^2 + bd\sigma_2^2 + (ad+cb)\sigma_{12}$$

Eksempel - fortsat ... nu med matricer

Eksemplet kunne også være regnet igennem med matricer.

$$Y_1 = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = aX_1 + bX_2 \qquad Y_2 = \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = cX_1 + dX_2$$

Eksempel - fortsat ... nu med matricer

Eksemplet kunne også være regnet igennem med matricer.

$$Y_1 = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = aX_1 + bX_2 \qquad Y_2 = \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = cX_1 + dX_2$$

Kovariansmatricen for $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^\top$ opstilles med

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \mathbb{V}(X_1) & \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_1, X_2) \\ \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_2, X_1) & \mathbb{V}(X_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

Eksempel - fortsat ... nu med matricer

Eksemplet kunne også være regnet igennem med matricer.

$$Y_1 = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = aX_1 + bX_2 \qquad Y_2 = \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = cX_1 + dX_2$$

Kovariansmatricen for $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^\top$ opstilles med

$$\mathbb{C}\text{ov}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \mathbb{V}(X_1) & \mathbb{C}\text{ov}(X_1, X_2) \\ \mathbb{C}\text{ov}(X_2, X_1) & \mathbb{V}(X_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

Vi kan skrive vores lineære relationer mellem **Y** og **X** vha matricer:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \mathbf{Y}$$

Eksempel - fortsat ... nu med matricer

Eksemplet kunne også være regnet igennem med matricer.

$$Y_1 = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = aX_1 + bX_2 \qquad Y_2 = \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = cX_1 + dX_2$$

Kovariansmatricen for $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^\top$ opstilles med

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \mathbb{V}(X_1) & \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_1, X_2) \\ \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_2, X_1) & \mathbb{V}(X_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

Vi kan skrive vores lineære relationer mellem **Y** og **X** vha matricer:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \mathbf{Y} = A\mathbf{X}$$

Eksempel - fortsat ... nu med matricer

Eksemplet kunne også være regnet igennem med matricer.

$$Y_1 = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = aX_1 + bX_2 \qquad Y_2 = \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = cX_1 + dX_2$$

Kovariansmatricen for $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^\top$ opstilles med

$$\mathbb{C}\text{ov}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \mathbb{V}(X_1) & \mathbb{C}\text{ov}(X_1, X_2) \\ \mathbb{C}\text{ov}(X_2, X_1) & \mathbb{V}(X_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

Vi kan skrive vores lineære relationer mellem **Y** og **X** vha matricer:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \mathbf{Y} = A\mathbf{X} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

Eksempel - fortsat ... nu med matricer

Eksemplet kunne også være regnet igennem med matricer.

$$Y_1 = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = aX_1 + bX_2 \qquad Y_2 = \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = cX_1 + dX_2$$

Kovariansmatricen for $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^\top$ opstilles med

$$\mathbb{C}\text{ov}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \mathbb{V}(X_1) & \mathbb{C}\text{ov}(X_1, X_2) \\ \mathbb{C}\text{ov}(X_2, X_1) & \mathbb{V}(X_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

Vi kan skrive vores lineære relationer mellem **Y** og **X** vha matricer:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \mathbf{Y} = A\mathbf{X} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aX_1 + bX_2 \\ cX_1 + dX_2 \end{pmatrix}$$

Eksempel - fortsat ... nu med matricer

Eksemplet kunne også være regnet igennem med matricer.

$$Y_1 = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = aX_1 + bX_2 \qquad Y_2 = \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = cX_1 + dX_2$$

Kovariansmatricen for $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^\top$ opstilles med

$$\mathbb{C}\text{ov}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \mathbb{V}(X_1) & \mathbb{C}\text{ov}(X_1, X_2) \\ \mathbb{C}\text{ov}(X_2, X_1) & \mathbb{V}(X_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

Vi kan skrive vores lineære relationer mellem **Y** og **X** vha matricer:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \mathbf{Y} = A\mathbf{X} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aX_1 + bX_2 \\ cX_1 + dX_2 \end{pmatrix}$$

Kovarians matricen for **Y** bestemmes ved:

$$\mathbb{C}\text{ov}(\mathbf{Y}) = A\mathbb{C}\text{ov}(\mathbf{X})A^\top$$

Eksempel - fortsat ... nu med matricer

Eksemplet kunne også være regnet igennem med matricer.

$$Y_1 = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = aX_1 + bX_2 \qquad Y_2 = \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = cX_1 + dX_2$$

Kovariansmatricen for $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^\top$ opstilles med

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \mathbb{V}(X_1) & \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_1, X_2) \\ \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_2, X_1) & \mathbb{V}(X_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

Vi kan skrive vores lineære relationer mellem **Y** og **X** vha matricer:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \mathbf{Y} = A\mathbf{X} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aX_1 + bX_2 \\ cX_1 + dX_2 \end{pmatrix}$$

Kovarians matricen for **Y** bestemmes ved:

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(\mathbf{Y}) = A\mathbb{C}\mathrm{ov}(\mathbf{X})A^\top = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

Kovariansmatricen K_X

Generelt har vi afhængige variable $X_1, \dots, X_n$ med tilhørende kovariansmatrix,

$$K_X = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \dots & \sigma_{2n} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 & \dots & \sigma_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \sigma_{n3} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \quad \text{hvor } \sigma_{ij} = \sigma_{ji},$$

Dvs kovariansmatricen K_X er kvadratisk ($n \times n$) og symmetrisk ($\{K_X\}_{ij} = \{K_X\}_{ji}$).

Kovariansmatricen K_X

Generelt har vi afhængige variable $X_1, \dots, X_n$ med tilhørende kovariansmatrix,

$$K_X = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \quad X_i \text{ og } X_j \text{ uafhængige for alle } i, j.$$

Dvs kovariansmatricen K_X er kvadratisk ($n \times n$) og symmetrisk ($\{K_X\}_{ij} = \{K_X\}_{ji}$).

I tilfældet hvor X'erne er indbyrdes uafhængige er $\sigma_{ij} = 0$ for alle i og j og K_X bliver således en diagonal matrix.

Vilkårlige transformationer

I de fleste situationer vil $Y_1, \dots, Y_m$ være vilkårlige transformationer af $X_1, \dots, X_n$. Dvs vi har m differentiable funktioner $g_1, \dots, g_m$,

$$\begin{aligned} Y_1 &= g_1(X_1, \dots, X_n) \\ Y_2 &= g_2(X_1, \dots, X_n) \\ &\vdots \\ Y_m &= g_m(X_1, \dots, X_n) \end{aligned}$$

Approximation af $\mathbb{V}(Y_k)$

Som tidligere laver vi en lineær approximation af Y_k omkring middelværdierne af X'erne,

$$Y_k \approx g_k(X_1, \ldots, X_n) + \frac{\partial g_k}{\partial X_1}(X_1 - \mu_1) + \cdots + \frac{\partial g_k}{\partial X_n}(X_n - \mu_n)$$

Approximation af $\mathbb{V}(Y_k)$

Som tidligere laver vi en lineær approximation af Y_k omkring middelværdierne af X'erne,

$$Y_k \approx g_k(X_1, \ldots, X_n) + \frac{\partial g_k}{\partial X_1}(X_1 - \mu_1) + \cdots + \frac{\partial g_k}{\partial X_n}(X_n - \mu_n)$$

Dvs vi approximerer variansen af Y_k som tidligere,

$$\mathbb{V}(Y_k) \approx \left(\frac{\partial g_k}{\partial X_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \cdots + \left(\frac{\partial g_k}{\partial X_n}\right)^2 \sigma_n^2 + 2\sum_{i<j} \frac{\partial g_k}{\partial X_i}\frac{\partial g_k}{\partial X_j}\sigma_{ij}$$

Jakobimatricen G

Som for $(X_1, \ldots, X_n)$ kan vi tilsvarende finde kovariansmatricen K_Y for $(Y_1, \ldots, Y_m)$,

$$K_Y = \begin{bmatrix} \mathbb{V}(Y_1) & \mathbb{C}\text{ov}(Y_1, Y_2) & \ldots & \mathbb{C}\text{ov}(Y_1, Y_n) \\ \mathbb{C}\text{ov}(Y_2, Y_1) & \mathbb{V}(Y_2) & \ldots & \mathbb{C}\text{ov}(Y_2, Y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{C}\text{ov}(Y_n, Y_1) & \mathbb{C}\text{ov}(Y_n, Y_2) & \ldots & \mathbb{V}(Y_n) \end{bmatrix}$$

Jakobimatricen G

Som for $(X_1, \ldots, X_n)$ kan vi tilsvarende finde kovariansmatricen K_Y for $(Y_1, \ldots, Y_m)$,

$$K_Y = \begin{bmatrix} \mathbb{V}(Y_1) & \mathbb{C}\text{ov}(Y_1, Y_2) & \ldots & \mathbb{C}\text{ov}(Y_1, Y_n) \\ \mathbb{C}\text{ov}(Y_2, Y_1) & \mathbb{V}(Y_2) & \ldots & \mathbb{C}\text{ov}(Y_2, Y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{C}\text{ov}(Y_n, Y_1) & \mathbb{C}\text{ov}(Y_n, Y_2) & \ldots & \mathbb{V}(Y_n) \end{bmatrix}$$

I approximationen af variansen af Y_k anvendes de partielt afledte af g_k mht alle X'erne.

Jakobimatricen G

Som for $(X_1, \ldots, X_n)$ kan vi tilsvarende finde kovariansmatricen K_Y for $(Y_1, \ldots, Y_m)$,

$$K_Y = \begin{bmatrix} \mathbb{V}(Y_1) & \mathbb{C}\mathrm{ov}(Y_1, Y_2) & \ldots & \mathbb{C}\mathrm{ov}(Y_1, Y_n) \\ \mathbb{C}\mathrm{ov}(Y_2, Y_1) & \mathbb{V}(Y_2) & \ldots & \mathbb{C}\mathrm{ov}(Y_2, Y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{C}\mathrm{ov}(Y_n, Y_1) & \mathbb{C}\mathrm{ov}(Y_n, Y_2) & \ldots & \mathbb{V}(Y_n) \end{bmatrix}$$

I approximationen af variansen af Y_k anvendes de partielt afledte af g_k mht alle X'erne.

Derfor indføres Jakobimatricen G som indeholder alle de partielt afledte af $g_1, \ldots, g_m$,

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial X_1} & \frac{\partial g_1}{\partial X_2} & \ldots & \frac{\partial g_1}{\partial X_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial X_1} & \frac{\partial g_2}{\partial X_2} & \ldots & \frac{\partial g_2}{\partial X_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial X_1} & \frac{\partial g_m}{\partial X_2} & \ldots & \frac{\partial g_m}{\partial X_n} \end{bmatrix}$$

Den generelle fejlforplantningslov

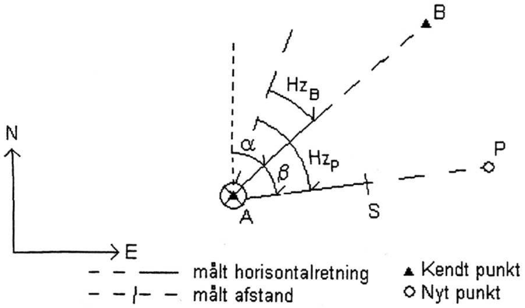
Med kovariansmatricen K_X og Jakobimatricen G, kan den generelle fejlforplantningslov for bestemmelse af kovariansmatricen K_Y udtrykkes ved,

$$K_Y \approx G\, K_X G^\top$$

hvor dimensionerne passer, idet $m \times m = (m \times n)(n \times n)(n \times m)$.

Anvendelse: Polære målinger

Afsnit 11.3 i Karsten Jensens noter:



Koordinaterne til punkt $P = (E, N)$.

$$\begin{pmatrix} E \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_A + S\sin(100 - [\alpha+\beta]) \\ N_A + S\cos(100 - [\alpha+\beta]) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_A + S\cos(\alpha+\beta) \\ N_A + S\sin(\alpha+\beta) \end{pmatrix},$$

idet $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos(\theta)$ og $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin(\theta)$.

Nøjagtighed af punktet P

Vi anvender notationen fra noterne,

$$\Sigma_{YX} = \begin{bmatrix} \sigma_E^2 & \sigma_{EN} \\ \sigma_{NE} & \sigma_N^2 \end{bmatrix}$$

Nøjagtighed af punktet P

Vi anvender notationen fra noterne,

$$\begin{aligned} \Sigma_{YX} &= \begin{bmatrix} \sigma_E^2 & \sigma_{EN} \\ \sigma_{NE} & \sigma_N^2 \end{bmatrix} \\ &\approx J\Sigma_b J^\top \end{aligned}$$

Nøjagtighed af punktet P

Vi anvender notationen fra noterne,

$$\begin{aligned}
\Sigma_{YX} &= \begin{bmatrix} \sigma_E^2 & \sigma_{EN} \\ \sigma_{NE} & \sigma_N^2 \end{bmatrix} \\
&\approx J\Sigma_b J^\top \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial E}{\partial S} & \frac{\partial E}{\partial \beta} \\ \frac{\partial N}{\partial S} & \frac{\partial N}{\partial \beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_S^2 & \sigma_{S\beta} \\ \sigma_{S\beta} & \sigma_\beta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial E}{\partial S} & \frac{\partial N}{\partial S} \\ \frac{\partial E}{\partial \beta} & \frac{\partial N}{\partial \beta} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Nøjagtighed af punktet P

Vi anvender notationen fra noterne,

$$\begin{aligned}\Sigma_{YX} &= \begin{bmatrix}\sigma_E^2 & \sigma_{EN}\\ \sigma_{NE} & \sigma_N^2\end{bmatrix}\\ &\approx J\Sigma_b J^\top\\ &= \begin{bmatrix}\frac{\partial E}{\partial S} & \frac{\partial E}{\partial \beta}\\ \frac{\partial N}{\partial S} & \frac{\partial N}{\partial \beta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_S^2 & \sigma_{S\beta}\\ \sigma_{S\beta} & \sigma_\beta^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial E}{\partial S} & \frac{\partial N}{\partial S}\\ \frac{\partial E}{\partial \beta} & \frac{\partial N}{\partial \beta}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Vi antager at koordinaterne for opstillingspunkterne A og B er fejlfrie, dvs $\sigma_{E_A}^2 \approx 0$, $\sigma_{N_A}^2 \approx 0$, $\sigma_{E_B}^2 \approx 0$, $\sigma_{N_B}^2 \approx 0$, og dermed $\sigma_\alpha \approx 0$.

Dermed reduceres kovariansmatricen for observationerne til

$$\Sigma_b = \begin{bmatrix}\sigma_S^2 & 0\\ 0 & \sigma_\beta^2\end{bmatrix}$$

Kovariansmatricen Σ_{YX}

Vi bestemmer nu Jakobimatricen J,

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial E}{\partial S} & \frac{\partial E}{\partial \beta} \\ \frac{\partial N}{\partial S} & \frac{\partial N}{\partial \beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\alpha+\beta) & S\cos(\alpha+\beta) \\ \cos(\alpha+\beta) & -S\sin(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$

Kovariansmatricen Σ_{YX}

Vi bestemmer nu Jakobimatricen J,

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial E}{\partial S} & \frac{\partial E}{\partial \beta} \\ \frac{\partial N}{\partial S} & \frac{\partial N}{\partial \beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\alpha+\beta) & S\cos(\alpha+\beta) \\ \cos(\alpha+\beta) & -S\sin(\alpha+\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\theta) & S\cos(\theta) \\ \cos(\theta) & -S\sin(\theta) \end{bmatrix},$$

hvor $\theta = \alpha + \beta$.

Kovariansmatricen Σ_{YX}

Vi bestemmer nu Jakobimatricen J,

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial E}{\partial S} & \frac{\partial E}{\partial \beta} \\ \frac{\partial N}{\partial S} & \frac{\partial N}{\partial \beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\alpha+\beta) & S\cos(\alpha+\beta) \\ \cos(\alpha+\beta) & -S\sin(\alpha+\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\theta) & S\cos(\theta) \\ \cos(\theta) & -S\sin(\theta) \end{bmatrix},$$

hvor $\theta = \alpha + \beta$.

Vi anvender udtrykket for Σ_{YX} og indsætter de kendte matricer,

$$\Sigma_{YX} = \begin{bmatrix} \sin(\theta) & S\cos(\theta) \\ \cos(\theta) & -S\sin(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_S^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\beta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ S\cos(\theta) & -S\sin(\theta) \end{bmatrix}$$

Kovariansmatricen Σ_{YX}

Vi bestemmer nu Jakobimatricen J,

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial E}{\partial S} & \frac{\partial E}{\partial \beta} \\ \frac{\partial N}{\partial S} & \frac{\partial N}{\partial \beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\alpha+\beta) & S\cos(\alpha+\beta) \\ \cos(\alpha+\beta) & -S\sin(\alpha+\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\theta) & S\cos(\theta) \\ \cos(\theta) & -S\sin(\theta) \end{bmatrix},$$

hvor $\theta = \alpha + \beta$.

Vi anvender udtrykket for Σ_{YX} og indsætter de kendte matricer,

$$\begin{aligned} \Sigma_{YX} &= \begin{bmatrix} \sin(\theta) & S\cos(\theta) \\ \cos(\theta) & -S\sin(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_S^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\beta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ S\cos(\theta) & -S\sin(\theta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sin(\theta) & S\cos(\theta) \\ \cos(\theta) & -S\sin(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_S^2 \sin(\theta) & \sigma_S^2 \cos(\theta) \\ \sigma_\beta^2 S\cos(\theta) & -\sigma_\beta^2 S\sin(\theta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Kovariansmatricen Σ_{YX}

Vi bestemmer nu Jakobimatricen J,

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial E}{\partial S} & \frac{\partial E}{\partial \beta} \\ \frac{\partial N}{\partial S} & \frac{\partial N}{\partial \beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\alpha+\beta) & S\cos(\alpha+\beta) \\ \cos(\alpha+\beta) & -S\sin(\alpha+\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\theta) & S\cos(\theta) \\ \cos(\theta) & -S\sin(\theta) \end{bmatrix},$$

hvor $\theta = \alpha + \beta$.

Vi anvender udtrykket for Σ_{YX} og indsætter de kendte matricer,

$$\begin{aligned}
\Sigma_{YX} &= \begin{bmatrix} \sin(\theta) & S\cos(\theta) \\ \cos(\theta) & -S\sin(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_S^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\beta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ S\cos(\theta) & -S\sin(\theta) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sin(\theta) & S\cos(\theta) \\ \cos(\theta) & -S\sin(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_S^2 \sin(\theta) & \sigma_S^2 \cos(\theta) \\ \sigma_\beta^2 S\cos(\theta) & -\sigma_\beta^2 S\sin(\theta) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sigma_S^2 \sin^2(\theta) + \sigma_\beta^2 S^2 \cos^2(\theta) & (\sigma_S^2 + \sigma_\beta^2 S^2)\sin(\theta)\cos(\theta) \\ (\sigma_S^2 + \sigma_\beta^2 S^2)\sin(\theta)\cos(\theta) & \sigma_\beta^2 \cos^2(\theta) + \sigma_\beta^2 S^2 \sin^2(\theta) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Kovariansmatricen Σ_{XY} - forsat

Det endelige udtryk er derfor:

$$\Sigma_{YX} = \begin{bmatrix} \sigma_S^2 \sin^2(\theta) + \sigma_\beta^2 S^2 \cos^2(\theta) & (\sigma_S^2 + \sigma_\beta^2 S^2) \sin(\theta) \cos(\theta) \\ (\sigma_S^2 + \sigma_\beta^2 S^2) \sin(\theta) \cos(\theta) & \sigma_\beta^2 \cos^2(\theta) + \sigma_\beta^2 S^2 \sin^2(\theta) \end{bmatrix}$$

Kovariansmatricen Σ_{XY} - forsat

Det endelige udtryk er derfor:

$$\Sigma_{YX} = \begin{bmatrix} \sigma_S^2 \sin^2(\theta) + \sigma_\beta^2 S^2 \cos^2(\theta) & (\sigma_S^2 + \sigma_\beta^2 S^2) \sin(\theta)\cos(\theta) \\ (\sigma_S^2 + \sigma_\beta^2 S^2) \sin(\theta)\cos(\theta) & \sigma_\beta^2 \cos^2(\theta) + \sigma_\beta^2 S^2 \sin^2(\theta) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_S^2 \sin^2(\alpha+\beta) + \sigma_\beta^2 S^2 \cos^2(\alpha+\beta) & (\sigma_S^2 + \sigma_\beta^2 S^2) \sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) \\ (\sigma_S^2 + \sigma_\beta^2 S^2) \sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) & \sigma_\beta^2 \cos^2(\alpha+\beta) + \sigma_\beta^2 S^2 \sin^2(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$

Idet der gælder $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$ forkortes

$$\Sigma_{XY} = \begin{bmatrix} \sigma_S^2 \sin^2(\alpha+\beta) + \sigma_\beta^2 S^2 \cos^2(\alpha+\beta) & \frac{1}{2}(\sigma_S^2 - \sigma_\beta^2 S^2) \sin(2[\alpha+\beta]) \\ \frac{1}{2}(\sigma_S^2 - \sigma_\beta^2 S^2) \sin(2[\alpha+\beta]) & \sigma_S^2 \cos^2(\alpha+\beta) + \sigma_\beta^2 S^2 \sin^2(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$

Som (11.2) i Karstens noter.

Relativ nøjagtighed σ_P

Som et mål for de polære målingers *relative nøjagtighed i planen* anvendes punktspredningen,

$$\begin{aligned}
\sigma_P &= \sqrt{\frac{\sigma_E^2 + \sigma_N^2}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{\sigma_S^2 \sin^2(\alpha+\beta) + \sigma_\beta^2 S^2 \cos^2(\alpha+\beta) + \sigma_S^2 \cos^2(\alpha+\beta) + \sigma_\beta^2 S^2 \sin^2(\alpha+\beta)}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{[\sigma_S^2 + \sigma_\beta^2 S^2] \sin^2(\alpha+\beta) + [\sigma_\beta^2 S^2 + \sigma_S^2] \cos^2(\alpha+\beta)}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{[\sigma_S^2 + \sigma_\beta^2 S^2](\sin^2(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha+\beta))}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{\sigma_S^2 + \sigma_\beta^2 S^2}{2}}
\end{aligned}$$

Relativ nøjagtighed σ_P

Som et mål for de polære målingers *relative nøjagtighed i planen* anvendes punktspredningen,

$$\sigma_P = \sqrt{\frac{\sigma_S^2 + \sigma_\beta^2 S^2}{2}} = \sqrt{\frac{\sigma_S^2 + \sigma_\beta^2 \frac{S^2}{\omega^2}}{2}},$$

hvor σ_β^2 erstattes med $\frac{\sigma_\beta^2}{\omega^2}$ idet σ_β er opgivet i gon.